Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Vincenzo G. Cavallaro

Semplici rappresentazioni approssimate della costante d’Eulero e del numero e

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **10** (1931), n.5, p. 295–297.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1931_1_10_5_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1931.

Semplici rappresentazioni approssimate della costante d'Eulero e del numero *e*.

Nota di V. G. CAVALLARO (a Cefalù).

Sunto. - *L'A. espone una successione di semplici rappresentazioni approssimate della costante d'Eulero e del numero* e, *delle quali parecchie suscettibili di facile costruzione geometrica elementare, con errore praticamente trascurabile.*

Aggiunge inoltre qualch'altra congenere formula approssimata.

I.

D'un segmento unitario diciamo λ la misura della parte aurea, talchè λ^2 è la misura della parte minore del segmento diviso in sezione aurea. Sia C la *costante* d'Eulero, e la base dei logaritmi Neperiani, π il rapporto d'una circonferenza al suo diametro, l_x il lato del poligono regolare di x lati inscritto nella circonferenza di raggio unitario. Abbiamo (essendo $\backsimeq$ segno di uguaglianza approssimata):

$$C \backsimeq \frac{14}{15}\lambda, \qquad \text{err.} < \frac{1}{2.500} \qquad\qquad C \backsimeq \frac{7}{5}\left[\frac{1}{5} + \frac{5}{9}\lambda^2\right], \qquad \text{err.} < \frac{7}{50.000}$$

$$C \backsimeq \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda, \qquad \text{err.} < \frac{1}{25.000} \qquad\qquad C \backsimeq \frac{7}{8}\left[\frac{9}{4}\lambda^2 - \frac{1}{5}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{3.125}$$

$$C \backsimeq \frac{6}{7}[7\lambda^2 - 2], \quad \text{err.} < \frac{3}{10.000} \qquad\qquad C \backsimeq \sin 15^\circ + \frac{5}{6}\lambda^2, \quad \text{err.} < \frac{1}{10.000}$$

Il lettore può dimostrare subito queste formule e, per sua comodità, gli riportiamo qui i valori numerici che interessano:

$$\lambda = 0{,}6180339887\ldots; \qquad \lambda^2 = 0{,}3819660113\ldots;$$
$$\sin 15^\circ = 0{,}2588190451\ldots; \qquad C = 0{,}577215664\ldots \text{ (1)}.$$

$$C \backsimeq \frac{1}{9}\left[\frac{17}{10} + \frac{9}{7}e\right], \text{err.} < \frac{81}{100.000.000} \qquad\qquad C \backsimeq \frac{1}{2}[3e - 7], \quad \text{err.} < \frac{21}{100.000}$$

$$C \backsimeq \frac{2}{9}\left[\frac{5}{4}e - \frac{4}{5}\right], \quad \text{err.} < \frac{17}{200.000} \qquad\qquad C \backsimeq \frac{5}{9}\left[\frac{3}{4}e - 1\right], \text{err.} < \frac{1}{6{,}250}$$

$$C \backsimeq \frac{8}{9}\left[\frac{8}{5}e - \frac{37}{10}\right], \text{err.} < \frac{11}{100.000} \qquad\qquad C \backsimeq \frac{4}{7}\left[\frac{5}{9}e - 1\right], \text{err.} < \frac{17}{1.000.000}$$

Per dimostrarle basta ricordare che $e = 2{,}7182818284\ldots$

(1) Intorno alla costante d'Eulero vedi, ad esempio, E. CESARO. *Analisi algebrica,* pag. 147.

$C \backsimeq \frac{2}{5}\left[1 + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\right]$. err. $< \frac{3}{100.000}$, $\quad C \backsimeq \frac{9}{49}\pi$. err. $< \frac{1}{5.000}$

$C \backsimeq \frac{1}{6}\left[\frac{4}{3}\sqrt{\pi} + \frac{11}{10}\right]$. err. $< \frac{1}{270.270}$ $\quad C \backsimeq \frac{5}{3}\left[\frac{3}{7}\pi - 1\right]$, err. $< \frac{3}{25.000}$

$C \backsimeq \frac{1}{8}\left[\frac{4}{5}\sqrt{\pi} + \frac{16}{5}\right]$, err. $< \frac{3}{100.000}$ $\quad C \backsimeq \frac{9}{4}\left[\frac{2}{5}\pi - 1\right]$, err. $< \frac{11}{50.000}$

$C \backsimeq \frac{1}{2}\left[\frac{5}{3}\sqrt{\pi} - \frac{9}{5}\right]$. err. $< \frac{9}{50.000}$ $\quad C \backsimeq \frac{49}{27}\cdot\frac{1}{\pi}$. err. $< \frac{1}{2.173}$

$C \backsimeq \frac{1}{4}\left[1 + \frac{5}{12}\pi\right]$. err. $< \frac{1}{29.411}$ $\quad C \backsimeq \frac{3}{4}\left[\frac{6}{5}\pi - 3\right]$. err. $< \frac{11}{50.000}$

$C \backsimeq \frac{1}{\pi} + \sin 15^\circ$, err. $< \frac{11}{125.000}$ $\quad C \backsimeq \frac{6}{7}\left[\frac{4}{\pi} - \frac{3}{5}\right]$, err. $< \frac{1}{6.250}$

$\pi = 3{,}1415926535\ldots;\quad \frac{1}{\pi} = 0.3183098861\ldots;\quad \sqrt{\pi} = 1.7724538509\ldots$

$C \backsimeq \frac{1}{3}l_3$. err. $< \frac{7}{50.000}$ $\quad C \backsimeq \frac{8}{3}l_{29}$, err. $< \frac{3}{5.000}$

$C \backsimeq \frac{4}{9}[1 + l_{21}]$. err. $< \frac{3}{10.000}$ $\quad C \backsimeq \frac{7}{4}l_{19}$, err. $< \frac{3}{2.500}$

$l_3 = 1{,}7320508076\ldots;\quad l_{19} = 0.3291891\ldots;\quad l_{21} = 0.2980845\ldots;$
$l_{29} = 0{,}2162380\ldots$

II.

$e \backsimeq \frac{5}{2} + \frac{4}{7}\lambda^2$, err. $< \frac{1}{62.500}$ $\quad e \backsimeq \frac{12}{5} + \frac{5}{6}\lambda^2$, err. $< \frac{1}{40.000}$

$e \backsimeq \frac{1}{3}\left[8 + \frac{1}{4}\lambda\right]$, err. $< \frac{3}{25.000}$ $\quad e \backsimeq 1 + \frac{9}{2}\lambda^2$, err. $< \frac{3}{5.000}$

$e \backsimeq \frac{5}{8}\left[4 + \frac{\pi}{9}\right]$, err. $< \frac{3}{25.000}$ $\quad e \backsimeq \frac{1}{9}\left[23 + \sqrt[3]{\pi}\right]$. err. $< \frac{31}{5.000.000}$

$e \backsimeq \frac{1}{3}\left[\frac{9}{5}\pi + \frac{5}{2}\right]$. err. $< \frac{1}{140.844}$ $\quad e \backsimeq \frac{7}{8}\left[\frac{3}{5} + \sqrt{2\pi}\right]$, err. $< \frac{9}{500.000}$

$e \backsimeq \frac{4}{5}\left[3 + \frac{5}{4}\frac{1}{\pi}\right]$. err. $< \frac{3}{100.000}$ $\quad e \backsimeq 8\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\sqrt{\pi}\right]$, err. $< \frac{9}{100.000}$

$e \backsimeq \frac{1}{4}\left[9 + \frac{3}{5} + \frac{4}{\pi}\right]$, err. $< \frac{3}{100.000}$ $\quad e \backsimeq \frac{1}{\pi} + \frac{12}{5}$, err. $< \frac{3}{100.000}$

$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4645918875\ldots;\quad \sqrt{2\pi} = 2{,}5066282746\ldots$

$$e \backsimeq \frac{9}{7}\left|\frac{7}{10} + l_4\right|, \quad \text{err.} < \frac{3}{400.000} \qquad e \backsimeq \frac{2}{9}[12 + l_{27}], \quad \text{err.} < \frac{1}{50.000}$$

$$l_4 = \sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots; \qquad l_{27} = 0{,}2321858\ldots$$

III.

$$C + \pi - e \backsimeq 1, \quad \text{err.} < \frac{1}{1.886} \qquad \pi + \frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{11}{5} + \sqrt[3]{2}, \quad \text{err.} < \frac{1}{50.000}$$

$$e + \pi - 5 \backsimeq \frac{9}{4}\lambda^2, \quad \text{err.} < \frac{1}{2.173} \qquad \text{Log}\, e \backsimeq \frac{9}{8}\pi - \frac{31}{10}, \quad \text{err.} < \frac{3}{1.000.000}$$

$$C \backsimeq \frac{7}{8}\left[\sqrt[3]{2} - \frac{3}{5}\right], \quad \text{err.} < \frac{11}{100.000} \qquad C \backsimeq \frac{5}{9}\left[\frac{1}{5} + \sin 57^\circ\right], \quad \text{err.} < \frac{9}{50.000}$$

$$e \backsimeq \frac{5}{2}\left|\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\right|, \quad \text{err.} < \frac{11}{50.000}$$

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992105\ldots; \qquad \text{Log}\, e = 0{,}4342944819\ldots;$$

$$\sin 57^\circ = 0{,}8386705680\ldots; \qquad \sqrt[3]{4} = 1{,}5874007\ldots$$