RECENSIONI

A. DUSCHEK e W. MAYER: *Lehrbuch der Differentialgeometrie* Band I, *Kurven und Flächen im Euklidischen Raum*, di A. DUSCHEK, pp. VIII+250; Band II, *Riemannsche Geometrie*, di W. MAYER, pp. VIII+245. B. G. Teubner, 1930.

Con la pubblicazione di questi due volumi, dovuti a due valenti studiosi della Scuola di Vienna, la già ricca e rigogliosa produzione dell'ultimo decennio nei campi della Geometria Differenziale si accresce di un nuovo e abbastanza ampio, interessante trattato. A differenza di quelli di FUBINI e CECH e di BLASCHKE, questo si mantiene (1) nel campo delle classiche *Lezioni* del BIANCHI: la geometria *metrica* differenziale delle curve e superficie dello spazio ordinario, e delle varietà riemanniane. D'altra parte, per l'impostazione e per gli algoritmi adottati, la presente opera si differenzia assai nettamente dalle recenti trattazioni (relative ai campi di studio ora detti) di BURGATTI e BOGGIO e di CARTAN, mentre si avvicina piuttosto a quelle di CAMPBELL e di EISENHART. Come in queste ultime, si fa uso costante, sistematico del *calcolo differenziale assoluto* di RICCI, che per la geometria metrica differenziale — come giustamente affermano gli AA. nella Prefazione — è il naturale strumento di ricerca (2).

Gli AA. non rinunciano a valersi di questo algoritmo neppure quando ciò potrebbe dare maggiore spigliatezza alla trattazione: ad es. nella rappresentazione dei vettori dello spazio ordinario. Così è evitato del tutto l'uso dell'ordinario calcolo vettoriale e omografico (come l'intendiamo qua in Italia) e del relativo simbolismo: ma la poca scorrevolezza della « symbolfreie Vektorrechnung » (I, p. V) non appare compensata dal risparmio di poche

(1) A parte alcuni sviluppi sulla geometria del calcolo delle variazioni, nel II volume: di cui dirò più oltre.

(2) « Der natürliche Kalkül der Differentialgeometrie ist die Tensorrechnung ». I (e II) vol., p. IV.

notazioni, ormai a tutti familiari, e dall'uniformità e omogeneità, indubbiamente notevoli, conseguite negli sviluppi. Anche la minuziosa cura con cui gli AA. si preoccupano di precisare in ogni caso le ipotesi di continuità, derivabilità, ecc. delle funzioni che introducono, e di evitare l'uso del linguaggio infinitesimale, appesantisce un po' la trattazione, ed educa nel lettore piuttosto l'abito ad esporre con esattezza che l'intuizione geometrica; ma ad ogni modo, costituisce un pregio peculiare di quest'opera, e porta a chiarimenti degni di nota.

I due volumi sono del tutto indipendenti fra loro e condotti in modo alquanto diverso, anche nella esposizione degli stessi o di analoghi argomenti (1). La trattazione è nel I volume un po' più spigliata; d'altra parte il II volume presenta più spiccati caratteri d'originalità. Sul contenuto dei due volumi dirò ora brevemente.

Nel I volume abbiamo, dopo una *Introduzione* in cui si svolgono alcune generalità e si precisa l'algoritmo adottato nei riguardi dell'ambiente euclideo (ordinario), un Capitolo sulle *curve nello spazio* e cinque Capitoli sulle *superficie*. Lo studio delle curve, a parte una elegante esposizione sulle curve analitiche nello spazio complesso (p. 61) non ha sviluppi sostanzialmente molto dissimili da quelli dei precedenti trattati. Lo studio delle superficie è invece ordinato in modo un po' diverso dal solito. Anzitutto si introducono (Cap. III) la prima forma fondamentale e i primi elementi di *geometria sulla superficie*, con le nozioni di vettore e tensore superficiali: premesse alcune generalità sulla teoria di due forme differenziali quadratiche (binarie) simultanee, si viene poi alle rappresentazioni conformi e ad argomenti che vi si collegano. Nel Cap. IV si passa alla *geometria esterna* della superficie, svolgendone la parte più elementare (seconda forma fondamentale, teoremi di MEUSNIER (2) e di EULERO, linee di curvatura e asinto-

(1) Ved. Prefazione, I, p. III: « Es waren... an vereinzelten Stellen Wiederholungen nicht zu vermeiden, doch haben wir stets getrachtet, dieselben durch Wahl verschiedener Gesichtspunkte nicht eintönig werden zu lassen ». Questo può accrescere l'interesse della lettura per chi sia già a conoscenza delle questioni trattate: non altrettanto appare opportuno nei riguardi di chi voglia introdursi in questo campo di studi.

(2) L'espressivo enunciato dato a p. 175 pel teorema di MEUSNIER equivale a questo del BOMPIANI: *i cerchi osculatori a tutte le curve della superficie che escono da un punto* P *ed hanno ivi la stessa tangente stanno su di una sfera che ha il centro sulla normale in* P *alla superficie, ed è tangente a questa*. Tali sfere anche qui vengono, più innanzi, prese in considerazione (p. 138).

tiche,...). Nel Cap. V si introduce, nel modo classico — e ciò per valersene poi nello stabilire le « Ableitungsgleichungen » della superficie (considerata in relazione all'ambiente euclideo) e le relative condizioni d'integrabilità (equazioni di GAUSS e CODAZZI) — le nozioni dell'*analisi tensoriale* (superficiale) di RICCI. Coi mezzi così approntati si risolve il *Formenproblem*, cioè il problema della determinazione della superficie a partire dalle sue due forme fondamentali; si dà poi un cenno sulle *flessioni infinitesimali*. Nel Cap. VI si torna alla *Geometria sulla superficie*: si introducono e si studiano le nozioni di *parallelismo* secondo LEVI-CIVITA, di curvatura geodetica di una linea, di linee geodetiche, di coordinate normali di RIEMANN e abbastanza ampiamente, con una nuova dimostrazione, la formula di GAUSS-BONNET (1). Infine un breve Capitolo è dedicato a *superficie speciali*: rigate, superficie a curvatura costante, superficie minime. A proposito di queste ultime, si ha una concisa ma interessante trattazione del problema di PLATEAU comprendente il teorema (2): *non esistono, neppure nello spazio euclideo reale, superficie minime non analitiche.*

A differenza di quanto fa il DUSCHEK nel I volume, il MAYER nel II volume antepone allo studio della geometria riemanniana *quali preliminari analitici* le nozioni di *algebra* e di *analisi tensoriale* in uno spazio n-dimensionale. Fin dal principio (3), accanto alla rappresentazione usuale, in relazione a un riferimento curvilineo, l'A. introduce ed usa la rappresentazione dei vettori e tensori in relazione a un' n-pla di campi di vettori controvarianti (indipendenti) e all'n-pla « aggiunta », o supplementare, di campi di vettori covarianti. E appunto di questa rappresentazione « mit Hilfe eines in allen Punkten des R_n definierten n-Beins » si vale nel Cap. II per giungere, attraverso alla « tensorielle Ableitung » (che non è altra cosa di quella derivazione covariante introdotta e studiata da WEITZENBÖCK e da VITALI) alla « Ricciableitung », cioè alla derivata covariante di RICCI in relazione a una forma quadratica differenziale (4). Nel Cap. I va anche notata l'introduzione dei « Plückerschen Tensoren eines Vektorraumes », cioè, delle coordinate di GRASSMANN delle p-direzioni: trovo preferibili a

(1) Svariate altre nozioni e proprietà, in questo come in altri capitoli, sono aggiunte quali « Ergänzungen und Anwendungen ».

(2) « der bisher in keinem Lehrbuch der Differentialgeometrie zu finden war »: I, p. VI e 235.

(3) Cfr. I, p. 93.

(4) Di questo procedimento un po' tortuoso non appare manifesta l'opportunità.

questo riguardo le vedute più schiettamente geometriche di SCHOUTEN e CARTAN, e la denominazione più espressiva di « p–vettori », che in sostanza risale al PEANO.

Soltanto nel III Capitolo ha inizio lo studio della *geometria riemanniana*; negli sviluppi relativi alle nozioni fondamentali di questa vanno notate un'analisi minuziosa della nozione di *angolo* (p. 40) e l'introduzione del « Projektionstensors » di una l–direzione (p. 45) o del « Tangentevektorraum » di una F_l subordinata (p. 57), spesso utile nel seguito [1]. Sono pure abbozzati alcuni primi elementi della metrica p–vettoriale (p. 48).

Nel Cap. IV si studia la *teoria delle curve* in ambiente *riemanniano*, o in particolare, *euclideo* a più dimensioni; l'introduzione dell'R_n euclideo quale caso particolare di V_n riemanniana è qui fatta (p. 64) ricorrendo alla proprietà caratteristica dell'ammissione di riferimenti *cartesiani ortogonali* (pei quali $g_{ik} = \delta_{ik}$): in un modo che però concettualmente non mi sembra il più opportuno [2]. Particolarmente interessante è il Cap. V, il cui contenuto esorbita dalla vera e propria geometria riemanniana, riferendosi a quelli che ora vengono detti comunemente *spazi metrici generali*, o di FINSLER. A differenza di FINSLER e di BERWALD l'A., fedele al principio dell'esclusione del linguaggio infinitesimale, definisce la distanza di due punti P e Q, nello spazio delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, in relazione al problema variazionale $\delta \int_{t_1}^{t_2} F(x, x')dt = 0$ $\left(x_r' = \frac{dx_r}{dt}\right)$, come limite inferiore dei valori dell'integrale $\int_P^Q F(x, x')dt$, preso lungo linee qualunque congiungenti P a Q. Questa nozione serve di base ad uno studio elegante e approfondito sia di questi spazi metrici generalizzati, sia dei corrispondenti problemi variazionali. Alle note condizioni necessarie di EULERO è data veste geometrica con l'introduzione del *vettore di Eulero* (p. 86). A questo proposito va notata la seguente forma, che viene data a un noto teorema: « *per le estremali di una* F_r di R_n *è necessario e sufficiente che il vettore di Eulero* ρ_k (rispetto all'estremale, quale curva dell'R_n) *sia nor-*

[1] L'introduzione e l'uso di questo tensore, per le l-direzioni tangenti a una varietà l-dimensionale, anche anolonoma, subordinata alla varietà supposta, si trovano pure (sotto altra forma) nel *Ricci-Kalkül* e in altri lavori di SCHOUTEN.

[2] In quanto si fa ricorso alla nozione di *Normalabstande*, che non è prima esplicitamente definita.

male a tale F_r » (p. 87); enunciato che apparrebbe assai espressivo, se non lasciasse perplessi (per quanto si comprenda quanto l'A. ha inteso dire) il fatto che non è stata prima definita, nella geometria in considerazione, la nozione di angolo, nè di ortogonalità. L'A. estende poi le sue considerazioni dandoci una « Skizzierung des zweidimensionalen Variationsproblem »; e le applica al caso di una V_n riemanniana, cioè al problema delle *geodetiche*.

Nel Cap. VI si riprende lo studio delle varietà di RIEMANN; si introduce senz'altro, per un *tensore qualunque*, il trasporto parallelo secondo LEVI-CIVITA, e si studiano abbastanza ampiamente le varietà subordinate che sono *geodetiche* in un punto, o *totalmente geodetiche* (« ebenen »). Alle varietà subordinate in genere è dedicato il Cap. VII: il loro studio è basato su di una estensione del calcolo differenziale assoluto, che coincide con quel « calcolo pei tensori a più serie d'indici », in vario modo introdotto e usato da R. LAGRANGE, da B. VAN DER VAERDEN, da me e più recentemente da SCHOUTEN. Il Cap. VIII contiene uno studio degno di nota sugli *spazi di* SCHUR, spazi riemanniani in cui esiste *un punto* dal quale escono, in tutte le possibili orientazioni, varietà totalmente geodetiche: e sul caso particolare degli spazi *a curvatura costante*.

Di grande interesse, se pure l'A. non ha notato le evidenti e intime relazioni con precedenti ricerche del BOMPIANI [1], è lo studio svolto, un po' succintamente, nell'ultimo Capitolo: dedicato sostanzialmente alla determinazione di un *sistema completo di forme differenziali* atte a rappresentare una varietà, entro un ambiente euclideo o non-euclideo (a curvatura costante), nel gruppo delle *congruenze* dell'ambiente. Gli Schmiegräume $J_{12\ldots k}$ (p. 202) sono gli spazi k–osculatori secondo il BOMPIANI (σ_k secondo il VITALI); le *Formenquadrate* (p. 205) non differiscono che per fattori numerici da un sistema di forme introdotte (pel caso delle superficie) dal BOMPIANI, e i risultati esposti all'inizio di p. 226 potrebbero enunciarsi dicendo che: le coppie di varietà per le quali sussiste la mutua trasformabilità dei sistemi delle prime k forme sono tutte e sole le coppie di varietà *applicabili di specie* k (secondo il BOMPIANI) l'una sull'altra. L'A. non parla di applicabilità di specie k, ed evidentemente non ne è a conoscenza; ma questo non diminuisce l'interesse della esplorazione che l'A. fa in un campo, poco noto sinora, della geometria riemanniana.

Tre brevi aggiunte, relative ad una estensione del teorema di

(1) Riprese recentemente, da un punto di vista un po' diverso, dal VITALI e da me.

Meusnier, al teorema integrale di Gauss in una V_n, all'uso del calcolo tensoriale nella meccanica classica, concludono il volume.

Enea Bortolotti

Mathematical Tables. — V. I. Circular and Hyperbolic Functions, Exponential Sine and Cosine Integrals, Factorial (Gamma) and Derived Functions, Integrals of Probability Integral. Prepared by the Committee for the Calculation of Mathematical Tables. London Office of British Association, 1931.

Questo volume contiene 16 Tavole, calcolate con cura speciale da un comitato eletto dalla « British Association for the Advancement of Science », precedute da una chiara introduzione che spiega l'uso di ogni tavola, indica le applicazioni cui più particolarmente è destinata, ed il modo da tenere per tali applicazioni. Di ogni tavola è anche indicato il nome, o sono indicati i nomi dei calcolatori, ed è spiegato il metodo seguito nella esecuzione dei calcoli.

La Tavola 1 contiene, con 15 cifre decimali, i multipli di $1/2 \cdot \pi$ da 1 a 100.

La Tavola 2, il seno ed il coseno degli archi, espressi in radianti, calcolati con 15 decimali, di decimo in decimo di radiante, fino a 50,0 radianti.

La Tavola 3, il seno ed il coseno, con 11 decimali, di millesimo in millesimo di radiante, fino a radianti 1,600.

La Tavola 4, il seno ed il coseno iperbolico di πx con 15 decimali, per x variabile da 0,0000, fino a 0,0100.

La Tavola 5, il seno ed coseno iperbolico di πx, con 15 decimali, da $x = 0$, fino ad $x = 4{,}00$.

La Tavola 6, il seno ed il coseno iperbolico di x, calcolati con 15 decimali, da $x = 0$, o fino ad $x = 10{,}0$.

La Tavola 7 contiene i valori della funzione

$$Ei(x) = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u}\, du,$$

per x variabile di decimo in decimo da $x = 0{,}0$ fino ad $x = 15$.

La Tavola 8 contiene i valori delle funzioni seno e coseno integrale

$$Si(x) = \int \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du, \quad Ci(x) = -\int \frac{\cos u}{u}\, du,$$

calcolati con 20 cifre decimali, per x variabile di decimo in decimo, da $x = 0{,}0$ fino ad $x = 40$.

La Tavola 9 contiene i valori della funzione fattoriale $x! = \Gamma(1+x)$, calcolati di centesimo in centesimo da $x = 0{,}00$ fino ad $x = 1{,}00$, con 12 cifre decimali.

La Tavola 10 contiene i valori della funzione

$$\int \lg t!\, dt,$$

calcolati di centesimo in centesimo da $x = 0{,}00$ fino ad $x = 1{,}00$. con 10 cifre decimali.

La Tavola 11 contiene i valori della funzione *Digamma*

$$\frac{d}{dx} \lg_e x! = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x}{r(r+\lambda)} - \gamma,$$

essendo γ la costante di Eulero, calcolati con 12 cifre decimali da $x = 0{,}00$ fino ad $x = 1{,}00$ e da $x = 10{,}0$ fino ad $x = 60{,}0$.

La Tavola 12 contiene i valori della funzione *Trigamma*

$$\frac{d^2}{dx^2} \lg_e x! = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+x)^2}$$

calcolati con la medesima approssimazione della precedente. per gli stessi valori della variabile.

La Tavola 13 i valori della funzione *Tetragamma*

$$\frac{d^3}{dx^3} \lg_e x! = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+x)^3}$$

La Tavola 14 della funzione *Pentagamma*

$$\frac{d^4}{dx^4} \lg_e x! = 6 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+x)^4}$$

calcolati colla stessa approssimazione e fra i medesimi limiti della precedente.

La Tavola 15 contiene i valori delle funzioni

$$Hh_0(x) = \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dn, \quad Hh_n(x) = \int_x^{\infty} Hh_{n-1}(x) dx,$$

calcolati con 10 cifre decimali, per x variabile da $-7{,}0$ fino ad $x = 6{,}6$, e per n, variabile da 0, a 17.

La Tavola 16 contiene i valori della funzione

$$\frac{Hh_0(x) \cdot Hh_2(x)}{\xi Hh_1(x) \xi^2},$$

calcolati con 9 decimali da $x = -7{,}0$ fino ad $x = 5{,}0$.

Ai valori così calcolati sono uniti i valori delle differenze seconde e quarte, per l'uso della formula di interpolazione di EVERETT; ed anche l'uso di questa formula è chiaramente spiegato.

ETTORE BORTOLOTTI

« Annali della R. Scuola Normale di Pisa ». (Scienze matematiche e fisiche). Direttore: L. TONELLI. Esce in questi giorni il fascicolo I–II del T. I. della nuova serie di questo periodico. (Bologna, N. Zanichelli, 1931).

Diamo un cenno degli articoli contenuti in questa prima parte del primo volume del Periodico che, se non nuovo, può dirsi interamente rinnovato nella forma e nella sostanza.

T. LEVI-CIVITA: *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi.* — In questa Memoria sono riprese, con perfezionamenti ed aggiunte, le ricerche dell'autore sulla espressione asintotica dei potenziali newtoniani di linee e di tubi sottili, e l'applicazione fattane dal DA RIOS alle vicende (cambiamenti di forma e di posizione) di un filetto vorticoso in seno ad un liquido perfetto, animato (esternamente al filetto) da moto irrotazionale. Si può dire sinteticamente che le varie aggiunte sono sopra tutto intese a rendere l'intera trattazione agile e sistematica. Va tuttavia segnalata a parte quella finale, che concerne lo studio delle piccole vibrazioni di un filetto vorticoso intorno ad una delle possibili configurazioni stazionarie. Vi si trova sviluppato in modo esauriente quanto attiene alla forma circolare, con che se ne accerta la stabilità e si assegnano tutti i possibili periodi.

E. GOURSAT: *Sur quelques équations de Monge intégrables explicitement.* — Per un classico risultato di MONGE, l'integrale generale di ogni equazione $f(x, y, z, y', z') = 0$, in cui figurano due funzioni incognite della variabile x, può essere messo sotto forma esplicita, se si conosce un integrale completo d'una equazione a derivate parziali del primo ordine, associata all'equazione $f = 0$.

Un sistema di r equazioni $\Phi_i(x, x_1, \dots, x_n; P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, r)$ in cui figurano n funzioni incognite x_i di x $\left(P_i = \frac{\partial x_i}{\partial x},\ r = n - 1\right)$ può ugualmente essere integrato esplicitamente, se le funzioni Φ_i verificano certe condizioni. Queste condizioni sono di due specie. Quelle di una delle due specie esprimono che la molteplicità M_{n-r} dello spazio a n dimensioni $(P_1, \dots, P_n)$, definito mediante le relazioni $\Phi_i = 0$, è l'inviluppo d'una moltiplicità lineare a $n-r$ dimensioni, che dipende da un solo parametro. Se queste condizioni sono verificate, l'integrazione del sistema si riconduce all'integrazione d'una equazione di PFAFF, che deve essere di classe *tre*.

L. BRUSOTTI: *Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di* k *circuiti.* — In precedenti lavori l'A. ha dimostrato che, individuato nel senso della *Topologia projettiva* un sistema spaziale Σ di k circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi), esso ammette *modelli algebrici*, cioè composti coi circuiti di una curva gobba algebrica reale. Per il genere p della curva irriducibile [o per i generi $p_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ delle sue componenti irriducibili] il teorema di HARNACK fornisce la condizione *necessaria* $p \geq k - 1$ (o risp. analoghe $p_i \geq k_i - 1$). Nel presente lavoro si dimostra che le condizioni sono anche *sufficienti*; e cioè che *per i modelli algebrici di Σ i problemi concernenti il genere ammettono tutte* (*e sole*) *le soluzioni compatibili col teorema di* HARNACK (sia per modelli irriducibili, sia per modelli *comunque* riducibili). In particolare ogni circuito spaziale (comunque intrecciato) ammette *modelli razionali*.

C. CARATHÉODORY: *Ueber die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel.*

Si dà un teorema di esistenza del minimo assoluto per problemi *regolari* del Calcolo delle Variazioni, il quale è fondato sulla considerazione del limite inferiore $s(P, Q)$ dei valori che l'integrale in questione assume su tutte le ammissibili curve rettificabili e chiuse che passano per due punti qualsiasi P e Q del campo in cui si suppongono muoversi le curve ammesse. Il teorema si estende anche ai problemi non *regolari*, purchè, per ciascun punto P del campo si possa costruire un *campo di estremali forti (o semiforti)*, continue o discontinue, uscenti da P e circondanti questo punto completamente. Per mezzo della $s(P, Q)$ vien data anche una condizione necessaria per l'esistenza del minimo assoluto.

L. TONELLI: *Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Variazioni.* — L'A. generalizza due teoremi di esistenza del minimo per l'integrale $\int_C F(x, y, x', y')ds$, dati da H. HAHN e C. CARATHÉODORY, e ne dimostra l'equivalenza.

U. CISOTTI: *Scie limitate.* — Viene sollevata e approfondita la questione di esistenza di scie limitate dovute alla traslazione uniforme di un profilo rigido in un velo piano indefinito. La questione è impostata in modo generale. È trattato in modo esauriente il caso corrispondente a profili poligonali.

G. JULIA: *Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes.* — Si dà dapprima, per mezzo di $\xi = F(z)$, la rappresentazione conforme di un'area A del piano z, limitata da $p+1$ curve di JORDAN, su una *superficie di Riemann canonica* σ, limitata esternamente dal cerchio γ_0, di centro 0 e di raggio 1, descritto p volte nel senso positivo, e limitata internamente da p curve circolari chiuse $(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ di centro 0 (cerchi ordinari e cerchi aumentati di cerchi descritti più volte in senso contrario). La frontiera, il numero dei fogli, i punti di ramificazione, la connessione, sono *proprietà caratteristica* di σ. Se i punti di ramificazione sono tutti interni, σ si prolunga in due diversi modi: 1°) incorporandola nella superficie algebrica di RIEMANN Σ_1, definita dalla funzione $u(\xi)$ inversa di un *polinomio* $\xi = P(u)$ di grado p. Allora $u[F(z)]$ dà la rappresentazione conforme di A su una area D, del piano u, limitata *da* p + 1 *cassinoidi*, e determinata a meno di uno *spostamento euclideo.* (Tipo canonico di DE LA VALLÉE POUSSIN); 2°) incorporandola nella superficie di RIEMANN Σ_2, definita dalla funzione $v(\xi)$ inversa di una frazione razionale $\xi = R(v)$, di grado p, e che conserva il cerchio $|v| \leq 1$. Allora $v[F(z)]$ dà la rappresentazione conforme dell'area A su un'area D', del piano v, limitata da $p+1$ *cassinoidi generalizzate*, di cui l'esterna è il cerchio $|v| = 1$, D' essendo determinato a meno di uno *spostamento non euclideo del cerchio* $|v| \leq 1$. (Nuovo tipo canonico).

P. NALLI: *Spazi di Riemann di seconda classe.* — Riferendoci ad una possibile classificazione degli spazi di RIEMANN, si danno alcuni esempi di spazi di seconda classe, che vengono chiamati spazi normali di seconda classe. Si dà anche una condizione necessaria e sufficiente perchè uno spazio sia di seconda classe.

N. ABRAMESCU: *Le mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle même.*

Si studia il movimento di una figura piana variabile che si conserva simile a sè stessa nel rapporto di similitudine ρ, funzione del tempo. Esiste un centro I di movimento (punto di velocità nulla all'istante t). Le linee di corrente sono delle spirali logaritmiche, e le linee che tagliano ad un dato istante, sotto un angolo costante v, dato dalla linea di corrente in questo momento, le traiettorie dei diversi punti della figura in movimento, concorrono nel centro I. La base e la rotolante sono tangenti in I, e le velocità del punto I su queste curve stanno tra loro nel rapporto ρ. Si trovano le componenti dell'accelerazione del punto M, della figura mobile, su IM e sulla perpendicolare a IM, ed anche la terza componente che fa l'angolo v con la tangente in I alla base. Si ottengono le proiezioni dell'accelerazione sulla tangente in M (che fa l'angolo v con IM) e sulla normale in M; si trovano un cerchio delle inflessioni e un cerchio delle accelerazioni. Si dà, infine, un metodo per la costruzione del centro di curvatura in M.

P. BURGATTI: *Sull' equazione* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$ *e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di* $y_n(x) = 0$. — In questa Nota è esposto un teorema col quale si può giudicare della realtà o no delle radici dei polinomi $y_n(x)$ di grado n, soddisfacenti all'equazione differenziale

$$(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0,$$

dal solo esame dei coefficienti di questa equazione. Si dimostra e si sfrutta all'uopo un teorema di LAGUERRE; indi si fanno varie altre considerazioni.

L. LICHTENSTEIN: *Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskorper.* — Nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane x, y, si trovi una massa puntiforme M. Sulla circonferenza C: $x^2 + y^2 = R^2$ siano poi distribuite delle masse di densità lineare μ costante. Le singole particelle possano muoversi senza impedimento attraverso alle particelle vicine in tutte le direzioni e non esercitino alcuna forza elastica l'una sull'altra. Fra le singole masse agiscono le forze di gravitazione. La forza agente fra due masse m_1, m_2, situate alla distanza r_{12} avrà allora il valore

$$-K\frac{m_1m_2}{r_{12}{}^2}$$

che conduce al potenziale logaritmico. Se si ammette che l'intero sistema ruoti uniformemente con velocità angolare

$$\omega = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{R}(M + \pi\mu R)^{\frac{1}{2}}$$

intorno all'origine delle coordinate, diventa possibile un equilibrio dinamico. Queste condizioni di moto vengono a mancare appena si aggiunge al sistema una massa M_1 ruotante uniformemente nel piano x, y. Vengono determinate condizioni permanenti di moto e, nel caso in cui manchi la massa M_1, oscillazioni libere.