Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Fantappiè

Risposta alla Nota “Sui funzionali analitici”

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 138–141.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_138_0>

Risposta alla Nota " Sui funzionali analitici ".

Nota di LUIGI FANTAPPIÈ (a Berlino).

Sunto. - *L'A. risponde ad alcune questioni poste dalla prof.ª* PIA NALLI *in una precedente Nota di questo* « Bollettino ».

1. Nel numero di Febbraio di questo « Bollettino » [1] la collega prof.ª PIA NALLI richiede una dimostrazione di alcune asserzioni sulla teoria dei funzionali analitici, contenute in una mia Memoria dei Lincei [2]. Sono ben lieto che mi venga così fornita l'occasione di chiarire questi punti, che potevano riuscire oscuri al lettore della Memoria.

Ritengo perciò opportuno riprendere la questione negli stessi termini con cui è stata posta dalla prof.ª NALLI, nella Nota citata:

« $u(t)$ è una funzione analitica monodroma nel piano com-
« plesso t, olomorfa sopra una curva C (chiusa, semplice e rego-
« lare) ed all'esterno di essa; E è la regione che essa racchiude.

« Si rappresenta E conformemente e biunivocamente sul cer-
« chio del piano complesso t', con centro in $t' = 0$ e raggio 1, per
« mezzo delle formule di trasformazione

$$t' = \tau(t), \quad t = \sigma(t')$$

[1] PIA NALLI, *Sui funzionali analitici*, « Boll. U. M. I. », anno XI, n. 1, Febbraio 1932-X.

[2] *I funzionali analitici*. « Mem. dei Lincei », serie 6ª, vol. III, fascicolo XI (1928-30); pagg. 25-27. Questa Memoria sarà indicata brevemente con « F. A. ».

« τ e σ funzioni regolari, inversa l'una dell'altra, definite la prima « per t variabile nella regione E, e la seconda per t' variabile nel « cerchio considerato.

« $\overline{C}$ è una curva interna ad E, alla quale sono interni tutti i « punti singolari di $u(t)$; la trasformazione $t' = \tau(t)$ fa corrispon- « dere ad essa nel piano t' una circonferenza di raggio $R < 1$.

« Si pone

$$(1) \qquad u(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}} \frac{u(x)}{t - \sigma\{\varepsilon\tau(x)\}}\, dx$$

« con

$$|\varepsilon| < \frac{1}{R}.$$

« Si vede subito che $u(t, \varepsilon)$ è funzione regolare di t all'esterno « della curva $C(\varepsilon)$ trasformata per mezzo della $t = \sigma(t')$ della circon- « ferenza del piano t' con centro nell'origine e raggio $R|\varepsilon|$ ».

A questo punto la prof.ª Pia Nalli domanda una dimostrazione di queste due asserzioni:

a) che la funzione $u(t, \varepsilon)$ sia monodroma, non solo all'esterno, ma anche all'interno di $C(\varepsilon)$;

b) che i suoi punti singolari siano *tutti* e *soli* i punti $\sigma\{\varepsilon\tau(t_k)\}$, se t_k sono i punti singolari della $u(t)$.

2. Per chiarire questi due punti, consideriamo la corrispondenza

$$(2) \qquad \xi = \sigma\{\varepsilon\tau(x)\}, \quad x = \sigma\left\{\frac{1}{\varepsilon}\,\tau(\xi)\right\},$$

che, per

$$(3) \qquad 0 < |\varepsilon| < \frac{1}{R},$$

trasforma in modo *biunivoco e regolare* l'area interna a $\overline{C}$, in cui varia x, nell'area interna a $C(\varepsilon)$, in cui varia ξ. Poichè anzi le due funzioni τ e σ sono regolari rispettivamente, entro tutta l'area E ed il cerchio unitario, per ogni valore di ε soddisfacente alla (3), la corrispondenza (2) si manterrà sempre biunivoca e regolare anche tra due aree un poco più ampie delle precedenti, limitate rispettivamente da una curva $\overline{C}'$, contenente $\overline{C}$, e da una curva $\overline{C}'(\varepsilon)$, contenente $C(\varepsilon)$ nell'interno.

Prendendo ξ come nuova variabile d'integrazione, l'espressione integrale (1) si trasforma nell'altra

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\varepsilon)} \frac{u\left(\sigma\left\{\frac{1}{\varepsilon}\tau(\xi)\right\}\right)}{t - \xi} \frac{dx}{d\xi} d\xi. \tag{4}$$

Ma la funzione

$$U(\xi) = u\left(\sigma\left\{\frac{1}{\varepsilon}\tau(\xi)\right\}\right) \tag{5}$$

è regolare in *tutti e soli* i punti ξ, entro $\overline{C}'(\varepsilon)$, che corrispondono per la (2) a punti x entro $\overline{C}'$, regolari per la $u(x)$, assumendo anzi, in ogni tale punto ξ, lo stesso valore che assume la u nel punto x corrispondente. Quindi la $U(\xi)$ è certo monodroma entro $\overline{C}'(\varepsilon)$ (come la $u(x)$ entro $\overline{C}'$), e ha ivi per punti singolari precisamente *tutti e soli* i punti $\sigma\{\varepsilon\tau(t_k)\}$, se t_k sono i punti singolari di $u(t)$. D'altra parte la funzione $\frac{dx}{d\xi}$ è pure regolare e *diversa da* 0 entro $\overline{C}'(\varepsilon)$. quindi *anche il prodotto* $U(\xi)\frac{dx}{d\xi}$ *sarà una funzione monodroma in questa regione, con gli stessi punti singolari* $\sigma\{\varepsilon\tau(t_k)\}$, *come la* $U(\xi)$.

Inoltre, per ogni valore di t, situato nella striscia compresa fra $\overline{C}'(\varepsilon)$ e $\overline{C}(\varepsilon)$, quindi interno a $\overline{C}'(\varepsilon)$, ma certo regolare per il prodotto ora considerato, la formula di CAUCHY ci dà

$$U(t)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}'(\varepsilon)} \frac{U(\xi)}{\xi - t}\frac{dx}{d\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\varepsilon)} \frac{U(\xi)}{t - \xi}\frac{dx}{d\xi} d\xi;$$

e poichè il 2° integrale non è altro, per la (5), che l'espressione (4) della $u(t, \varepsilon)$, avremo quindi

$$u(t, \varepsilon) = U(t)\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}'(\varepsilon)} \frac{U(\xi)}{\xi - t}\frac{dx}{d\xi} d\xi.$$

Ma l'integrale che compare nel secondo membro è una funzione *monodroma e regolare* non solo nella striscia tra $\overline{C}'(\varepsilon)$ e $C(\varepsilon)$, ma anche entro tutta la regione racchiusa da $\overline{C}'(\varepsilon)$, ove d'altra parte anche il 1° termine è, per quanto abbiamo visto, monodromo e regolare in tutti e soli i punti che corrispondono, per la (2), a punti regolari della u. Dunque effettivamente *anche la funzione* $u(t, \varepsilon)$, *differenza di due tali funzioni, è monodroma entro* $\overline{C}'(\varepsilon)$, *e quindi anche entro* $\overline{C}(\varepsilon)$, *e possiede di più in questa regione, come punti* *singolari, tutti e soli i punti* $\sigma\{\varepsilon\tau(\mathrm{t_k})\}$, *se* $\mathrm{t_k}$ *sono i punti singolari della* u.

3. Ciò è quanto si richiedeva di dimostrare, tranne il caso $\varepsilon = 0$, in cui può effettivamente accadere, come è esplicitamente accennato anche nella mia Memoria (« F. A. », cap. I, pag. 27, formula [29]), che la funzione $u(t, 0)$ non abbia più alcuna singolarità, nemmeno per $t = t_0$, diventando identicamente nulla. Ma è da osservare che la linea analitica, adoperata nella mia successiva trattazione, non è quella data dalla $u(t, \varepsilon)$, bensì l'altra

$$y(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + e^{\varepsilon - 1} z(t) \tag{7}$$

(« F. A. », cap. I, pag. 27, formula [30]), in cui si provvede coll'aggiunta di una funzione sempre singolare nel solo punto $t = t_0$, a eliminare l'inconveniente (¹).

Cosicchè è lecito affermare in tutto rigore che, per $|\varepsilon| < \frac{1}{R}$, le funzioni della linea analitica $y(t, \varepsilon)$ sono sempre *funzioni monodrome di* t *e non eccezionali per la linea.*

(¹) All'eventuale obbiezione che l'aggiunta di questa funzione possa far nascere, per qualche valore di ε, funzioni eccezionali per la nuova linea (7), si può immediatamente rispondere che ciò non accade certamente, quando si disponga in modo opportuno della funzione $z(t)$ e del valore t_0, che nella mia Memoria vengono appunto lasciati arbitrari per questo scopo. Se infatti la funzione $y_0(t)$ originaria ha infiniti punti singolari entro E, basta far sì che, nella rappresentazione conforme tra E e il cerchio unitario, cada in un loro punto di condensazione il valore t_0, corrispondente al centro del cerchio, e prendere per $z(t)$ una funzione con una sola singolarità essenziale per $t = t_0$; con ciò il punto $t = t_0$ resta sicuramente punto di condensazione delle singolarità per le funzioni (7), quando ε soddisfa alle (3), e punto singolare isolato per la $y(t, 0)$.

Altrimenti, se $y_0(t)$ ha solo un numero finito di punti singolari isolati, basta far cadere t_0 in uno di questi, che non sia un polo del 1° ordine, al finito, con residuo $a = \frac{b}{e^{-1} - 1}$, se b è il residuo di $y_0(t)$ all'infinito (ciò è sempre possibile, poichè non tutte le n singolarità al finito di $y_0(t)$ possono essere poli del 1° ordine con un tale residuo a, risultando, in questa ipotesi, $b = -na$, mentre $e^{-1} - 1$ non può eguagliare il numero intero $-n$), e prendere poi per $z(t)$ la parte principale di $y_0(t)$ nel punto $t = t_0$. Così questo punto risulta regolare per le funzioni $u(t, \varepsilon)$, e quindi sempre singolare per $y(t, \varepsilon)$, quando ε soddisfa alle (3), mentre, per $\varepsilon = 0$, la $y(t, 0)$ resta ancora singolare nello stesso punto. Infatti, anche se la $y_0(t)$ ha in $t = t_0$ un polo (al finito) del 1° ordine, la $y(t, 0)$ ha in quel punto, per le ipotesi fatte, un residuo diverso da 0, e quindi è certo singolare per $t = t_0$.