BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

PAOLO STRANEO

Nuova teoria unitaria della fisica macroscopica a geometrizzazione assoluta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 148–154.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_148_0>

Nuova teoria unitaria della fisica macroscopica a geometrizzazione assoluta.

Nota di Paolo Straneo (a Genova).

Sunto. - *L'Autore, partendo dalla sua precedente soluzione del problema unitario della fisica macroscopica secondo l'impostazione datagli da* Weyl *nel 1917, risolve ora lo stesso problema, secondo la sua impostazione più ampia datagli da* Einstein *nel 1928.*

1. In questo « Bollettino » ho svolto l'anno passato per sommi capi una teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità che, col lieve perfezionamento apportatole con una recente Nota della R. Accademia dei Lincei [1] risolve pienamente e nel modo più semplice quel problema quale era stato posto da Weyl nel 1917.

Tenendo conto del perfezionamento anzidetto e introducendo un inessenziale fattore $^1/_2$, lo *spazio-tempo* doveva ritenersi caratterizzato dalla *connessione euclidea con torsione* (secondo la classificazione di Cartan)

$$\overline{L}^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\psi_{\mu}). \tag{1}$$

La legge unitaria era allora

$$\overline{L}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overline{L}g_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} \tag{2}$$

ove era $\overline{L}_{\mu\nu} = \overline{L}^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$, $\overline{L}$ il suo invariante e $E_{\mu\nu}$ un tensore di significato fisico del second'ordine, in generale asimmetrico rispetto agli indici μ, ν.

Tale legge scissa nelle sue parti simmetrica e emisimmetrica forniva le equazioni notissime

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Psi_{\mu\nu} \tag{4}$$

$$E_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Psi_{\mu\nu}$$

che potevano identificarsi rispettivamente colle equazioni gravitazionali di Einstein e con quelle elettromagnetiche di Maxwell.

[1] « Rendiconti », vol. XV, serie 6ª, 1° sem., pag. 77, 1932.

2. Ma nel 1928 EINSTEIN si era posto un problema unitario di natura più elevata.

Le equazioni (3) e (4) potevano venir considerate come una geometrizzazione dei fenomeni fisici attraverso a $10+6$ equazioni alle derivate parziali, la cui forma però dipendeva ancora dai tensori di natura fisica $T_{\mu\nu}$ e $\Psi_{\mu\nu}$, che si dovevano supporre dati in funzione dei punti dello *spazio-tempo*, ma non erano rappresentati da alcuna sua proprietà geometrica.

Doveva però esser possibile raggiungere *una geometrizzazione più profonda, assoluta*, come quella che raggiungeva la teoria della gravitazione in assenza di ogni tipo di energia non gravitazionale, quando cioè si poteva supporre $T_{\mu\nu}=0$. Allora le equazioni di EINSTEIN divenivano

$$G_{\mu\nu}=0 \tag{5}$$

e il loro integrale generale conteneva delle funzioni arbitrarie, *a priori*, indipendenti da qualsiasi presupposto fisico, e che solo *a posteriori* si determinavano in base ai dati del problema particolare che si voleva risolvere. In fondo si trattava sempre di far coincidere delle *singolarità analitiche* con delle *masse puntiformi* in un determinato tempo.

Una teoria unitaria nello spirito delle equazioni (5), anzichè in quello delle corrispondenti equazioni (3), dovrebbe quindi fornire, *attraverso gli arbitrari dell'integrazione*, anche i tensori da porre poi in corrispondenza coi tensori fisici $T_{\mu\nu}$ e $\Psi_{\mu\nu}$. Ed è ciò appunto che EINSTEIN tentò di raggiungere dal 1928 in poi.

3. Fino a pochi mesi fa l'eminente teorico seguì la via di imporre allo *spazio-tempo* una connessione più ampia di quella di LEVI-CIVITA, notoriamente caratteristica degli spazi riemanniani senza torsione, la quale fosse anche *a parallelismo assoluto*. Ma non essendo risultate soddisfacenti le varie soluzioni del problema così ottenute, Egli si pose ultimamente per una nuova via, eminentemente più astratta, che lo condusse a un risultato formalmente notevole, ma che lascia molto perplessi per quanto riguarda il punto di vista fisico (1).

4. Ora la conoscenza della soluzione del problema più ristretto, espressa dalla connessione (1) e dalla legge (2), unitamente a un complesso di considerazioni fisico-geometriche elevantesi al disopra

(1) A. EINSTEIN und W. MAYER, « Sitzungsberichten der preuss. Akademie d. Wiss. Phys. Math. Klasse », 1931.

del semplice formalismo matematico, mi permisero di raggiungere la soluzione dell'importante problema *proprio nell'ordine di idee propugnate per varî anni da* EINSTEIN *come quello più confacentesi al lato fisico della questione.*

Ammessa, per lo *spazio-tempo*, una connessione poco più complessa della (1), e impostata la condizione del parallelismo assoluto, una legge più semplice della (2) conduce *nella forma più piana e spontanea* alle leggi *complete* della nostra fisica macroscopica, cioè alle equazioni gravitazionali di EINSTEIN e alle equazioni elettromagnetiche di MAXWELL, *fornendo anche i rispettivi tensori dei membri a destra*, a meno di un loro ulteriore adattamento alle particolari circostanze fisiche del problema considerato, dell'ordine appunto dell'analogo adattamento ad esse delle costanti, o delle funzioni arbitrarie d'integrazione, nei problemi dipendenti da equazioni differenziali ordinarie, o alle derivate parziali.

5. Il procedimento seguito per qualche anno da EINSTEIN, benchè presentato sotto altra forma, equivaleva in ultima analisi a partire dalla connessione

$$\overset{*}{L}{}^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \Omega^{\alpha}_{\mu\nu}, \qquad \Omega^{\alpha}_{\mu\nu} = -\Omega^{\alpha}_{\nu\mu}, \tag{6}$$

costituita dalla connessione di LEVI-CIVITA e da un unico tensore generale di torsione (sempre secondo la classificazione di CARTAN) e a cercare di esprimere, per mezzo di quel tensore o di altri derivati dalla connessione, una legge generale che in qualche modo potesse scindersi, rigorosamente o almeno approssimativamente, nelle equazioni gravitazionali e in quelle elettromagnetiche; tutto ciò sotto la esplicita condizione della sussistenza nello *spazio-tempo* del parallelismo assoluto.

Per ragioni che appariranno chiaramente in seguito, cotesto procedimento urtava fatalmente a una difficoltà, che, data la non conoscenza della soluzione del problema più ristretto, era difficile superare.

6. La conoscenza invece della forma generale di quella soluzione, cioè della connessione (1) e della legge (2), mi convinse dell'opportunità del criterio di cercar di determinare per la (1) un *supplemento di connessione* $\Theta^{\alpha}_{\mu\nu}$, che automaticamente introducesse nel campo puramente geometrico, tensori omologhi a quelli di natura fisica, che fino allora venivano introdotti solamente nell'espressione della legge fondamentale (2).

Scriviamo cotesta connessione complessiva nella forma:

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \overline{L}^{\alpha}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Theta^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x^\mu}\right) + \frac{1}{2}\Theta^{\alpha}_{\mu\nu}, \tag{7}$$

osservando che, come è notissimo, le $\Theta^{\alpha}_{\mu\nu}$ *dovranno* in ogni caso esser le componenti di un tensore, il quale, per il fatto che la *connessione primitiva* (1) è semplicemente *euclidea con torsione*, *potrà* esser scelto *emisimmetrico*.

In altri termini il desiderato supplemento di connessione *potrà* tradursi semplicemente nell'aggiunta di *un nuovo tensore di torsione* alla (1), tensore di cui indicheremo quindi le componenti colla consueta notazione $\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$.

7. Ciò premesso, possiamo cominciare la caratterizzazione di cotesto tensore imponendo in primo luogo alla connessione $L^{\alpha}_{\mu\nu}$, in cui deve supporsi sostituito il tensore generico Θ col tensore emisimmetrico Ω, *la condizione di essere a parallelismo assoluto*. Ciò equivale, come è notissimo, a porre, per il tensore generale di curvatura $L^{\alpha}_{\mu\nu\rho}$, la condizione:

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = 0. \tag{8}$$

Ora il problema di determinare le caratteristiche dei tensori che trasformano *una data connessione primitiva in una connessione a parallelismo assoluto* fu studiato, ma in generale a partire da una connessione primitiva *o euclidea, o metrica,* ma sempre *senza torsione.* Però l'estensione delle soluzioni al caso della preesistenza di una torsione non presenta difficoltà concettuali, specialmente se, conglobando per un momento i due tensori di torsione primitivo e nuovo in un unico tensore $T^{\alpha}_{\mu\nu}$, applicheremo, come è evidentemente lecito, alla connessione così risultante la regola semplicissima valevole quando la connessione primitiva è riemanniana (¹), la quale consiste nell'imporre al tensore T la condizione

$$T_{\lambda\mu\nu} = - T_{\mu\lambda\nu}. \tag{9}$$

Ne segue con calcoli puramente formali l'equazione

$$\Omega_{\mu\alpha\nu} + \Omega_{\alpha\mu\nu} + 2g_{\mu\alpha}\psi_\nu - g_{\mu\nu}\psi_\alpha - g_{\alpha\nu}\psi_\mu = 0, \tag{10}$$

la quale, se fossero nulle le ψ, esprimerebbe per le Ω la regola (9), mentre ora, in presenza di esse, ne esprime la generalizzazione che tien conto della preesistente torsione.

(¹) E. Bortolotti, *Parallelismi assoluti nelle* V_n *riemanniane.* « Atti del R. Istituto Veneto », vol. 86, pag. 255, 1927.

Moltiplicando per $g^{\mu\alpha}$ e sommando per rapporto alle μ si ricava la condizione per noi fondamentalissima:

$$\Omega^{\lambda}_{\lambda\nu} = 0. \tag{A}$$

Così la nostra connessione sarà definitivamente:

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\psi_{\mu}\right) + \frac{1}{2}\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}, \qquad \Omega^{\lambda}_{\lambda\mu} = -\Omega^{\lambda}_{\mu\lambda} = 0. \tag{S}$$

8. D'altra parte, data l'emisimmetria del tensore che abbiamo detto T e l'euclideità (con torsione) della connessione L, si ha per il tensore generale di curvatura (EISENHART, *Non riemannian geometry*, eq. 5,3 e 6,4)

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} + T^{\alpha}_{\mu\nu\rho},$$

$$T^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = T^{\alpha}_{\mu\rho:\nu} - T^{\alpha}_{\mu\nu:\rho} + T^{\lambda}_{\mu\rho}T^{\alpha}_{\lambda\nu} - T^{\lambda}_{\mu\nu}T^{\alpha}_{\lambda\rho},$$

ove con $R^{\alpha}_{\mu\nu\rho}$ è come di solito indicato il tensore di curvatura di RIEMANN e col segno ; la derivazione covariante rispetto alle g, cioè l'ordinaria derivazione covariante di RICCI.

Eseguendo le operazioni indicate e poscia contraendo per $\alpha = \rho$, si avrà, tenuto conto della (A)

$$L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\psi_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\psi_{\mu}\right) - \frac{1}{2}\Omega^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} + \frac{1}{2}\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu} = 0. \tag{11}$$

Finalmente passando all'invariante L avremo

$$L = G + \frac{1}{2}\Omega^{\lambda}_{\alpha\rho}\Omega^{\alpha\rho}_{\lambda} = 0. \tag{12}$$

Dopo ciò, in perfetto accordo colla (8), assumiamo come legge fondamentale della nostra teoria unitaria

$$L_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Lg_{\mu\nu} = 0. \tag{S-bis}$$

Sostituendo per mezzo delle (11) e (12) e scindendo l'equazione così ottenuta nelle sue parti simmetriche e emisimmetriche, avremo senz'altro

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\Omega^{\lambda}_{\alpha\rho}\Omega^{\alpha\rho}_{\lambda}g_{\mu\nu} = -k\Theta_{\mu\nu}, \\ \frac{\partial\psi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\psi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} &= \Omega^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} = \Psi_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{13}$$

9. È evidente che il secondo gruppo di queste equazioni già formalmente identico alle equazioni di MAXWELL, coinciderà anche sostanzialmente con esse, quando si interpretino le ψ_{ν} come le com-

ponenti del *potenziale elettromagnetico* e il tensore a destra come quella del tensore (emisimmetrico) maxwelliano delle *forze elettromagnetiche*, ponendo

(A-bis) $$\Omega^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} = \Psi_{\mu\nu}.$$

Per quanto poi riguarda il primo gruppo delle equazioni (13) potremmo senz'altro giungere ad una conclusione analoga relativamente alle equazioni einsteiniane, ponendo il tensore simmetrico a destra eguale a $-kB_{\mu\nu}$ e poi interpretando le $g_{\mu\nu}$ come le componenti del *potenziale einsteiniano della gravitazione*, le $B_{\mu\nu}$ come quelle del *tensore energetico generale* (costituito dall'insieme di tutti i tensori energetici di origine elettromagnetica e materiale) e la k come la *costante einsteiniana della gravitazione*, poichè tutte le predette posizioni sono compatibili fra di loro. Colle ultime di esse vengono infatti imposte alle 24 $\Omega^{\alpha}_{\mu\nu}$, considerate nella loro generalità, 10 condizioni, le quali, unite alle 4 (A) e alle 6 (A-bis) le determinano completamente, a meno dell'arbitraria scélta del sistema di riferimento.

10. Ma è interessante osservare che il tensore a destra nel primo gruppo della (13), non solo è globalmente compatibile colle vedute solite circa il tensore energetico generale, ma ne precisa, in parte almeno, anche la costituzione. E ciò rappresenta uno dei pregi della teoria esposta.

Riscriviamo cotesto tensore, aggiungendovi e poi sottraendovi la quantità $\frac{1}{2}\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu}$. Esso assumerà la forma:

(14) $$\left(-\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\Omega^{\lambda}_{\alpha\rho}\Omega^{\alpha\rho}_{\lambda} g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu} = k\Theta_{\mu\nu}.$$

Osserviamo ora che la sostituzione del tensore $\Omega^{\lambda}_{\alpha\mu}\Omega^{\alpha}_{\lambda\nu}$ col tensore $\Delta^{\rho}_{\alpha\mu;\rho}\Delta^{\sigma}_{\lambda\nu;\sigma}g^{\alpha\lambda}$ non ne altera affatto la generalità purchè aggiungiamo ad esso un tensore $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}$ per cui sia identicamente $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu;\alpha} \equiv 0$. Con ciò, avuto riguardo della (A-bis) il tensore (14) assume l'espressione:

(15) $$\left(-\Psi_{\alpha\mu}\Psi_{\lambda\nu}g^{\alpha\lambda} + \frac{1}{4}\Psi_{\alpha\rho}\Psi^{\alpha\rho}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\Delta^{\lambda}_{\alpha\mu}\Delta^{\alpha}_{\lambda\nu} +$$
$$+ \left(-\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha\rho}_{\lambda}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} = k\Theta_{\mu\nu}.$$

Ora, analizzando cotesta espressione è facile vedere che il secondo tensore tra parentesi rappresenta esattamente il tensore $-kT_{\mu\nu}$ della teoria della sola gravitazione; che l'ultimo tensore corrisponde al tanto ricercato tensore energetico (del campo) della gravitazione, il quale però qui non si presenta più come un *pseudo-tensore*, ma in forma tensorialmente corretta; che il primo tensore tra parentesi corrisponde al notissimo tensore energetico elettromagnetico o maxwelliano; che finalmente il tensore espresso per mezzo delle Λ costituisce l'analogo elettromagnetico (mutatis mutandis) del tensore energetico del campo gravitazionale.

È così che questa teoria, non solo risolve il problema unitario (macroscopico) più generale, ma elimina tutte le incongruenze della teoria della gravitazione che avevano resistito a tutti i tentativi fatti dal 1916 in poi.

La teoria sarà fra poco pubblicata in forma più diffusa e con piacere saranno inviati estratti ai Soci di questa Unione che li richiedessero.