Armando Chiellini

Sulle superficie armoniche rigate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 201–206.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_201_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Sulle superficie armoniche rigate.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostra che tutte e sole le superficie armoniche rigate sono il piano, il paraboloide rigato, l'elicoide rigato ad area minima ed una loro combinazione lineare.*

1. Presa una superficie

$$z = z(xy)$$

riferita ad un sistema di assi ortogonali $0(xyz)$, la diremo *armonica* [1], se è

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r + t = 0.$$

Vogliamo in questa Nota vedere se esistono superficie *rigate armoniche* e in caso affermativo di determinarle tutte. Che ne debbano esistere, risulta subito, osservando che tali sono p. es. le superficie

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad z = k \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

cioè il piano e l'elicoide rigato ad area minima.

Inoltre osserviamo che se due superficie

$$z = z_1(xy), \quad z = z_2(xy)$$

sono armoniche, lo sono anche le superficie

$$z = Az_1(xy) + Bz_2(xy) + C$$

con A, B, C costanti.

[1] Osserviamo che tale proprietà non è intrinseca per la superficie, ma relativa ad un dato sistema di assi; in altre parole, non è una proprietà che si conservi nelle generali trasformazioni di uguaglianza geometrica della superficie.

2. Ciò premesso, consideriamo una rigata qualunque, le cui equazioni parametriche potremo scrivere sotto la forma

$$(1)\qquad \begin{cases} y = m(t)x + a(t) \\ z = n(t)x + b(t) \end{cases}$$

dove m, n, a, b sono funzioni di un parametro t, finite e continue insieme alle derivate prime e seconde, in un certo intervallo (t_1, t_2).

Scrivendo le (1) sotto la forma

$$(2)\qquad \begin{cases} f(xyt) = m(t)x + a(t) - y = 0 \\ \varphi(xzt) = n(t)x + b(t) - z = 0, \end{cases}$$

e supponendo che sia

$$(3)\qquad m'(t)x + a'(t) \neq 0,$$

mediante la teoria delle funzioni implicite, determiniamo le derivate parziali prime e seconde della $z(xy)$, definita dal sistema (2).

Osservando che nel caso nostro risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = m(t), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = m'(t)x + a'(t) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = m'(t), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = m''(t)x + a''(t) \end{cases}$$

otteniamo dalla prima delle (2):

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{-m}{m'x + a'}, \quad \dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{1}{m'x + a'} \;\;(^1) \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \dfrac{2mm'}{(m'x + a')^2} - \dfrac{m^2(m''x + a'')}{(m'x + a')^3}, \quad \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \dfrac{-(m''x + a'')}{(m'x + a')^3} \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \dfrac{-m'}{(m'x + a')^2} + \dfrac{m(m''x + a'')}{(m'x + a')^3}. \end{cases}$$

Dopo ciò, passiamo alla determinazione delle derivate prime e seconde della $z(xy)$; tenendo conto delle (4) e del quadro

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = n, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -1, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = n'x + b' \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = n', \quad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = n''x + b'', \end{cases}$$

(1) Per semplicità di scrittura, tralasciamo l'indicazione della variabile t

tteniamo con semplici calcoli

$$
(4') \left\{ \begin{aligned}
p &= \frac{\partial z}{\partial x} = n - \frac{m(n'x+b')}{m'x+a'}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{n'x+b'}{m'x+a'} \\
r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2mn'}{m'x+a'} + \frac{m^2(n''x+b'')}{(m'x+a')^2} + \\
&\quad + \frac{(n'x+b')\{2mm'(m'x+a') - m^2(m''x+a'')\}}{(m'x+a')^3} \\
s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{n'}{m'x+a'} - \frac{m(n''x+b'')}{(mx'+a')^2} + \\
&\quad + \frac{(n'x+b')\{-m'(m'x+a') + m(m''x+a'')\}}{(m'x+a')^3} \\
t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{n''x+b''}{(m'x+a')^2} - \frac{(n'x+b')(m''x+a'')}{(m'x+a')^3} \text{ [1]}.
\end{aligned} \right.
$$

Imponendo ora la condizione che la nostra rigata sia armonica, cioè che sia

$$r + t = 0$$

otteniamo l'equazione:

$$
\frac{-2mn'}{m'x+a'} + \frac{(1+m^2)(n''x+b'')}{(m'x+a')^2} +
+ \frac{(n'x+b')}{(m'x+a')^3}\{2mm'(m'x+a') - (1+m^2)(m''x+a'')\} = 0
$$

da cui, riducendo e semplificando

$$
(1+m^2)(m'n''-m''n')x^2 + (1+m^2)\{(a'n''-a''n') - (b'm''-b''m')\}x +
+ 2mm'(m'b'-n'a')x + (1+m^2)(a'b''-a''b') + 2ma'(m'b'-n'a') = 0.
$$

Otteniamo così un'equazione di secondo grado in x, che evidentemente deve ridursi ad un'identità e quindi dovrà essere:

$$
(5) \left\{ \begin{aligned}
& m'n'' - m''n' = 0 \\
& (1+m^2)\{(a'n''-a''n') - (b'm''-b''m')\} + 2mm'(m'b'-n'a') = 0 \\
& (1+m^2)(a'b''-a''b') + 2ma'(m'b'-n'a') = 0.
\end{aligned} \right.
$$

3. Osservando la prima delle (5) si vede che sono da distinguersi due casi, secondo che m è o non è una costante.

Supponiamo dapprima m *costante*; allora per la (3) dovrà es-

[1] Osserviamo che tra le p, q; r, s, t sussistono le relazioni
$$p = n - mq, \quad r + 2ms + m^2 t = 0.$$

sere $a' \neq 0$, cioè a non costante; per semplicità possiamo senz'altro prendere a come parametro t, così che sarà

$$m = m, \quad n = n(a), \quad b = b(a).$$

Il sistema (5) si riduce all'altro

$$n'' = 0, \quad b'' = \frac{2mn'}{1 + m^2}$$

cioè

$$n = n_1 a + n_2, \quad b = \frac{mn_1}{1 + m^2} a^2 + b_1 a + b_2$$

con n_1, n_2; b_1, b_2 costanti arbitrarie d'integrazione.

Sostituendo nelle (1), avremo come equazioni parametriche della nostra rigata

$$\begin{cases} y = mx + a \\ z = (n_1 a + n_2)x + \dfrac{mn_1}{1 + m^2} a^2 + b_1 a + b_2, \end{cases}$$

od anche, eliminando il parametro $a = y - mx$:

$$z = \frac{mn_1(y^2 - x^2)}{1 + m^2} + \frac{n_1(1 - m^2)}{1 + m^2} xy + (n_2 - mb_1)x + b_1 y + b_2$$

che è l'equazione di un paraboloide iperbolico, con l'asse parallelo all'asse delle z.

4. Consideriamo ora l'altro caso in cui m *non sia costante*; potremo allora prenderlo come parametro t, così che sarà questa volta

$$a = a(m), \quad n = n(m), \quad b = b(m)$$

ed il sistema (5) si trasformerà nel seguente:

$$(6) \qquad \begin{cases} n'' = 0 \\ (1 + m^2)(b'' - n'a'') + 2m(b' - n'a') = 0 \\ (1 + m^2)(a'b'' - a''b') + 2ma'(b' - n'a') = 0 \ [1] \end{cases}$$

il quale è atto a determinare pienamente a, b, n. Dalla prima delle (6) risulta subito

$$(7) \qquad n = n_1 m + n_2; \qquad (n_1, n_2 \text{ cost.})$$

[1] Osserviamo a questo punto, il che del resto risulterà anche da ciò che segue, che di superficie armoniche rigate, sviluppabili, non c'è che il piano; infatti dovendo essere contemporaneamente $r + t = 0$, $rt - s^2 = 0$, segue $r = t = s = 0$ e quindi $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

introducendo questa nelle altre due, otteniamo

$$(8)\qquad \begin{cases} b'' - n_1 a'' + \dfrac{2m}{1+m^2}(b' - n_1 a') = 0 \\ a'b'' - a''b' + \dfrac{2m}{1+m^2}\, a'(b' - n_1 a') = 0. \end{cases}$$

La prima delle (8) è un'equazione differenziale lineare ed omogenea, del 1° ordine, rispetto a

$$b' - n_1 a'$$

e quindi senz'altro, integrando

$$(9)\qquad b' - n_1 a' = \frac{b_1}{1+m^2}$$

con b_1 costante d'integrazione. Derivando rispetto ad m:

$$b'' - n_1 a'' = \frac{-2b_1 m}{(1+m^2)^2}$$

e sostituendo nella seconda delle (8):

$$\frac{b_1 a''}{1+m^2} = 0$$

cioè $a'' = 0$ da cui

$$(10)\qquad a = a_1 m + a_2 \qquad (a_1,\ a_2 \text{ cost.}).$$

Sostituendo infine nella (9) ed integrando di nuovo, risulta

$$(11)\qquad b = n_1 a_1 m + b_1 \operatorname{arctg} m + b_2.$$

Se ora introduciamo i valori (7), (10), (11) nelle (1), abbiamo come equazioni parametriche della nostra rigata armonica

$$\begin{cases} y = mx + a_1 m + a_2 \\ z = (n_1 m + n_2)x + n_1 a_1 m + b_1 \operatorname{arctg} m + b_2 \end{cases}$$

ed eliminando il parametro

$$m = \frac{y - a_2}{x + a_1},$$

si ottiene come equazione della superficie cercata:

$$z = n_1(y - a_2) + n_2 x + b_1 \operatorname{arctg} \frac{y - a_2}{x + a_1} + b_2$$

da cui il

TEOREMA: *Tutte le superficie armoniche rigate sono date dai piani, dai paraboloidi iperbolici (aventi l'asse parallelo all'asse delle* z*), dagli elicoidi rigati ad area minima (a piano direttore parallelo al piano* xy*) e da una loro combinazione lineare.*

5. Facciamo infine la seguente osservazione. Come è noto, le sole superficie rigate ad area minima sono il piano e l'elicoide rigato ad area minima, le quali superficie, dalla nostra ricerca, risultano essere anche superficie rigate armoniche; ne segue che nel caso delle rigate, cioè nel caso delle (2), delle due equazioni differenziali

$$r + t = 0, \quad (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0$$

la seconda deve essere contenuta nella prima; per il che è necessario, come si vede subito servendoci delle (4') e facendo un calcolo analogo al precedente, che sia $n = 0$, oppure $a = \text{cost.}$, $b = \text{cost.}$, con il che si ha appunto o l'elicoide o il piano.