

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

LETTERIO LABOCCETTA

## Espressione analitica di certi limiti singolari e definizione delle funzioni nei punti che ad essi corrispondono

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 11 (1932), n.4, p. 208–214.*

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1932\\_1\\_11\\_4\\_208\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_208_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

## Espressione analitica di certi limiti singolari e definizione delle funzioni nei punti che ad essi corrispondono.

Nota di LETTERIO LABOCETTA (a Roma).

**Sunto.** - Ricordato il modo di rappresentare le grandezze segmentali con le inverse delle costanti discontinue e indicato il modo di rendere definita una funzione dandole un valore assegnato nei punti nei quali è indeterminata, si dà l'espressione di funzioni in generale univalenti e che nei punti di discontinuità tendono a coprire un segmento, un'area, un volume; si aggiunge l'espressione delle funzioni che nei punti di indeterminazione prendono il valore dato dal Teorema di L'HOSPITAL.

1. Mi propongo in questa Nota di indicare un metodo per la effettiva espressione analitica delle funzioni in corrispondenza di quei loro punti di discontinuità nei quali assumono forma indefinita ed a destra, o a sinistra dei quali, o anche da ambo i lati, oscillano continuamente passando per tutti i valori compresi fra due limiti di indeterminazione  $a, b$  ( $a < b$ ), e costituenti un'insieme continuo equivalente appunto al segmento  $(a, b)$  chiuso od aperto ad entrambi gli estremi od anche ad uno solo di essi.

Sono esempi di funzioni di questo tipo:

$$(1) \quad \text{sen}^2(1/x), \quad \text{sen}(1/x), \quad x^{-2} \text{sen}^2(1/x), \quad x^{-1} \text{sen}(1/x)$$

delle quali la prima, per  $x$  tendente a zero, prende tutti i valori del segmento  $(0, 1)$  la seconda tutti i valori del segmento  $(-1, +1)$ , la terza e la quarta i valori tutti dei due segmenti infiniti  $(0, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ .

A questi quattro casi sono riducibili tutti gli altri; anzi basterebbe considerare solo il primo, perchè, data l'espressione del segmento  $(0, 1)$ , si passa poi da esso agli altri tre segmenti con le trasformazioni

$$(2) \quad x_2 = -1 + 2x_1, \quad x_3 = x_1/(1 - x_1), \quad x_4 = (2x_1 - 1)/x_1(1 - x_1)$$

le quali conservano anche l'ordine di successione dei punti nei segmenti corrispondenti.

**2. Grandezze segmentali.** — Analiticamente questi segmenti sono rappresentabili mediante le funzioni inverse delle forme fondamentali delle « costanti discontinue »

$$(3) \quad \text{Punt } x, \text{ Dir } x, \text{ sgn } x, Ix$$

delle quali ho già indicato delle generazioni geometriche elementari (<sup>1</sup>).

Ricorderò qui soltanto un recente perfezionamento nei simboli (3) avente lo scopo di rendere evidente se, nei punti di discontinuità, il valore assunto dalle funzioni costituisce un punto isolato o coincide con il limite destro o con quello sinistro, e ciò senza ricorrere alla scrittura per esteso delle espressioni analitiche che sarebbero necessarie a indicare questo comportamento.

A tale scopo conservo le notazioni originarie (3)  $\text{Dir } x, \text{ sgn } x$  solo per le corrispondenti funzioni con punti isolati costituenti una discontinuità regolare, e la notazione  $Ix$  per la funzione con tutti i tratti di invariabilità chiusi a sinistra; adopero invece le notazioni

$$(4) \quad \text{Dir}(x; 1), \text{ Dir}(x; 0), \text{ sgn}(x; 1), \text{ sgn}(x; -1)$$

per indicare le funzioni che nel punto di discontinuità prendono il valore segnato in parentesi dopo della variabile, e per le funzioni aventi più di un punto di discontinuità indico con  $(x; i)$  e con  $(x; i|)$  che i tratti di invariabilità son chiusi a sinistra oppure a destra.

Quindi ad esempio:

$$(5) \quad \text{Dir}(x; |i), \text{ Dir}(x; i|)$$

rappresentano rispettivamente la funzione che nel primo punto di discontinuità ( $x = -1$ ) ha il valore  $+1$  e nel secondo punto di discontinuità ( $x = +1$ ) il valore zero e la funzione che nel primo punto di discontinuità ha il valore zero e nel secondo il valore  $+1$ .

Ciò premesso, e indicando con  $f^{-1}(x)$  la funzione inversa di  $f(x)$ , si hanno, per le forme fondamentali qui appresso segnate le funzioni inverse seguenti:

$\text{Punt}^{-1} y$  che esiste solo per i due valori 0, 1 di  $y$  ai quali corrispondono ordinatamente l'insieme  $x \neq 0$  e il punto  $x = 0$ ;

$\text{Dir}^{-1}(y; 1)$  che esiste solo per i valori 0, 1 di  $y$  ai quali corrispondono ordinatamente i due insiemi  $|x| > 1, |x| \leq 1$ ;

(<sup>1</sup>) In tre mie Note, « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIII, giugno 1931, pag. 822 e pag. 912; vol. XIV, luglio 1931, pag. 3.

$\text{sgn}^{-1}(y; 1)$  che esiste solo per i valori  $-1, +1$  di  $y$  ai quali corrispondono gl'insiemi  $x < 0, x \geq 0$ ;

$I^{-1}y$  che esiste solo per i valori interi  $n$  di  $y$  ad ognuno dei quali corrisponde l'intervallo unitario successivo  $n \leq x < n + 1$ .

Manca una funzione che ad un valore determinato di  $x$ , per es.  $x = 0$ , faccia corrispondere l'insieme di tutti i numeri reali da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Una tale funzione è l'inversa della « *funzione nulla* » che indico col simbolo  $\text{Zer } x$ , da leggersi « *zero di  $x$*  », e che è zero per qualsiasi valore di  $x$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Espressioni analitiche di essa sono:

$$(6) \quad I; x^2/(1+x^2), \quad \text{sgn}^2 x \text{ Punt } x, \quad \text{Dir}(x; 1) \text{ Punt Dir}(x; 1).$$

Si ha così la funzione  $\text{Zer}^{-1}x$  che esiste solo per  $y = 0$  al quale corrisponde tutto l'insieme  $-\infty < x < +\infty$ .

Segue da ciò che l'intervallo unitario  $0 \leq x < 1$  è rappresentabile con una delle due espressioni

$$(7) \quad I^{-1}0, \quad \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{Dir}^{-1}(1; i) \right\}.$$

Ma poichè al segmento di lunghezza uno corrispondono quattro intervalli diversi  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq x < 1, 0 < x \leq 1, 0 < x < 1$ , secondo che esso è chiuso ai due estremi, solo a sinistra solo a destra, o aperto ai due estremi, bisogna alle espressioni (7) che si riferiscono al secondo caso aggiungere quelle per gli altri tre e queste sono ad esempio:

$$(8) \quad \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{Dir}^{-1}(1; 1) \right\}, \quad (1 - I^{-1}0), \quad \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{Dir}^{-1}(1; 0) \right\}.$$

Apparisce da quanto precede che in queste funzioni inverse non vi è corrispondenza univoca fra un valore della variabile ed un valore della funzione; tuttavia l'unicità della corrispondenza esiste, nel senso che ad un valore della variabile corrisponde un insieme di valori costituenti uno ed un solo segmento determinato in grandezza e posizione.

Se  $a$  e  $b$  sono gli estremi del segmento, ed esso è chiuso soltanto a sinistra per es. allora

$$(9) \quad x = a + (b - a)I^{-1}0$$

rappresenta l'insieme di tutti i valori compresi nel segmento, e si può considerare come un *numero segmentale* di cui  $a$  è la parte *puntuale* e  $(b - a)I^{-1}0$  la parte *segmentale* ottenuta come prodotto di un numero ordinario  $(b - a)$  per l'unità segmentale  $I^{-1}0$ .

### 3. Definizione delle funzioni nei punti di indeterminazione

— Indicato il modo di rappresentare i segmenti, ci resta da indicare in qual modo si rende definita una funzione nei punti nei quali essa, o la variabile, si presenta sotto la forma  $1/0$  come, ad esempio, nel punto  $x=0$  le due funzioni

$$(10) \quad y_1 = 1/x, \quad y_2 = x \operatorname{sen}(1/x).$$

Si può chiedere che in tale punto la funzione prenda il valore zero oppure un valore assegnato  $k \neq 0$ . Finora ciò è stato fatto a parole, ma noi siamo in grado di rendere definita analiticamente la funzione e ciò in modo semplicissimo. È chiaro infatti che le due funzioni

$$(11) \quad \frac{\operatorname{sgn}^2 x}{x + \operatorname{Punt} x}, \quad \frac{\operatorname{sgn}^2 x + k \operatorname{Punt} x}{x + \operatorname{Punt} x}$$

coincidono con  $1/x$  per qualunque valore di  $x \neq 0$  e prendono rispettivamente il valore zero ed il valore  $k$  per  $x=0$ , e ciò perché  $\operatorname{sgn}^2 x = 1$  per qualsiasi valore  $x \neq 0$  mentre è zero per  $x=0$  viceversa è  $\operatorname{Punt} x = 0$  per qualsiasi valore  $x \neq 0$  mentre è  $=$  per  $x=0$ .

Segue da ciò che le due funzioni

$$(12) \quad y_1 = \frac{\operatorname{sgn}^2 x}{x + \operatorname{Punt} x}, \quad y_2 = x \operatorname{sen} \frac{\operatorname{sgn}^2 x}{x + \operatorname{Punt} x}$$

coincidono dappertutto, per  $x \neq 0$ , con le funzioni (10) e nel punto  $x=0$  sono definite e prendono il valore zero, la seconda di esse diventando anzi in tal modo continua.

### 4. Limite costituito da un segmento. — Le quattro funzioni

$$(13) \quad \operatorname{Fr} x^{-1}, \operatorname{Cm} x^{-1}, \operatorname{R} x^{-1}, \operatorname{Plg} x^{-1}$$

oscillano, in prossimità di  $x=0$ , prendendo i valori definiti rispettivamente dalle limitazioni:

$$(14) \quad 0 \leq y < 1, \quad 0 < y \leq 1, \quad -1 < y < +1, \quad -1 \leq y \leq +1$$

coprendo cioè quattro segmenti, due di lunghezza uno e due di lunghezza due, che corrispondono ai quattro tipi di unità segmentali (7) e (8) e sono espressi da

$$(15) \quad y_1 = I^{-1}0, \quad y_2 = 1 - I^{-1}0, \quad y_3 = \operatorname{Dir}^{-1}(1; 0), \quad y_4 = \operatorname{Dir}^{-1}(1; 1)$$

Le funzioni (13) divengono perciò definite scrivendo

$$(16) \quad \operatorname{Fr} \frac{\operatorname{sgn}^2 x + I^{-1}0 \operatorname{Punt} x}{x + \operatorname{Punt} x}, \quad \operatorname{Cm} \frac{\operatorname{sgn}^2 x + (1 - I^{-1}0) \operatorname{Punt} x}{x + \operatorname{Punt} x}, \\ \operatorname{Plg} \frac{\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{Dir}^{-1}(1; 1) \operatorname{Punt} x}{x + \operatorname{Punt} x}, \quad \operatorname{R} \frac{\operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{Dir}^{-1}(1; 0) \operatorname{Punt} x}{x + \operatorname{Punt} x}$$

e queste, mentre coincidono con le (13) per ogni  $x \neq 0$ , per  $x = 0$  invece prendono i valori limitf (15).

Le due funzioni

$$(17) \quad x^{-1} \text{Fr } x^{-1}, \quad x^{-1} R x^{-1}$$

oscillano, per  $x$  tendente a zero, la prima fra 0 e un valore  $k$  e la seconda fra due valori  $-k$ ,  $+k$  tali che  $k$  termina, in entrambi i casi, col superare ogni valore assegnato. I limiti sono in questo caso la semiretta  $y \geq 0$  e l'intera retta  $-\infty < y < +\infty$  rappresentati cioè da

$$(18) \quad y_1 = \text{sgn}^{-1}(1; 1), \quad y_2 = \text{Zer}^{-1} 0$$

ma in questa Nota debbo restringermi a parlare solo del caso dei limiti costituiti da un segmento finito, differendo ad altro lavoro quello dei limiti costituiti da un segmento infinito che richiede più complesse considerazioni.

**5. Limite costituito da un'area.** — Si consideri la funzione

$$(19) \quad z' = \text{Plg } x^{-1} + i \text{Plg } y^{-1}$$

che ad ogni punto  $z(x, y)$  del piano complesso  $P$  fa corrispondere un punto  $z'(x', y')$  del quadrato del piano complesso  $P'$  di cui si darà qui appresso l'equazione, eccetto che ai punti degli assi  $XOY$  in corrispondenza dei quali è indeterminata. Si rende determinata in ogni caso ponendo per i due termini di essa due termini identici al terzo delle (16). Per  $x = 0 = y$  la (19) si riduce perciò a

$$(20) \quad z' = (1 + i) \text{Dir}^{-1}(1; 1)$$

valore complesso che rappresenta il quadrato, chiuso su tutto il perimetro, ed avente, nel campo reale, per equazione

$$(21) \quad \text{Dir}(x; 1) + \text{Dir}(y; 1) - 2 = 0.$$

Se invece della funzione  $\text{Plg } x$  avessimo nella (19) adoperato la funzione  $Rx$  avremmo avuto per la  $z'$  determinata

$$22) \quad z' = R \frac{\text{sgn}^2 x + \text{Dir}^{-1}(1; 0) \text{Punt } x}{x + \text{Punt } x} + iR \frac{\text{sgn}^2 y + \text{Dir}^{-1}(1; 0) \text{Punt } y}{y + \text{Punt } y}$$

la quale al punto origine del piano  $P$  fa corrispondere l'area quadrata:

$$(23) \quad \text{Dir}(x; 0) \text{Dir}(y; 0) - 1 = 0$$

aperta lungo tutto il contorno.

**6. Limite costituito da un volume.** Si consideri la funzione

$$(24) \quad P' = 0 + iRx^{-1} + jRy^{-1} + kRz^{-1}$$

che ad ogni punto  $P(x, y, z)$  dello spazio  $S$  fa corrispondere, vettorialmente, un punto  $P'$  di un cubo dello spazio  $S'$  di cui si darà qui appresso l'equazione, diventando però indeterminata sui piani coordinati.

Essa si rende sempre determinata dando a ciascuno dei fattori scalari la forma del quarto termine delle (16) e così si ha una funzione che in corrispondenza dell'origine prende la forma

$$(25) \quad 0 + i \operatorname{Dir}^{-1}(1; 0) + j \operatorname{Dir}^{-1}(1; 0) + k \operatorname{Dir}^{-1}(1; 0)$$

che rappresenta il cubo di lato 2 con il centro nell'origine, gli spigoli paralleli agli assi e senza la superficie di frontiera.

In coordinate cartesiane l'equazione di questo cubo è

$$(26) \quad \operatorname{Dir}(x; 0) \operatorname{Dir}(y; 0) \operatorname{Dir}(z; 0) = 1.$$

**7. Singolarità multiple.** — Abbiamo finora considerata l'indeterminazione in un punto ed il modo di definire in esso la funzione; ma è chiaro che se invece di  $\operatorname{Fr} x$ ,  $\operatorname{Plg} x$  e  $\operatorname{R} x$  nella prima delle (13), nella (19) e nella (24) poniamo rispettivamente  $\operatorname{Fr} | \operatorname{Fr} x |^{-1}$ ,  $\operatorname{Plg} | \operatorname{Plg} x |^{-1}$ ,  $\operatorname{R} | \operatorname{R} x |^{-1}$  e poi rendiamo definite nei modi innanzi esposti le funzioni così formate avremo delle funzioni che a ciascun punto di una retta  $R$  di un piano  $P$  di uno spazio  $S$  fanno corrispondere un punto di un segmento di una retta  $R'$  di un quadrato del piano  $P'$  di un cubo di uno spazio  $S'$  ad eccezione dei punti di coordinate intere ai quali fanno corrispondere dei segmenti, dei quadrati e dei cubi. Naturalmente nel caso del piano e dello spazio anche le rette e i piani di coordinate intere costituiscono delle singolarità nella corrispondenza.

**8. Teorema di L'Hospital.** — I procedimenti esposti per rendere definita una funzione in un punto nel quale si presenta indeterminata sono di applicazione più generale di quella indicata. Se infatti le due funzioni  $f(x)$ ,  $F(x)$  sono tali che per un certo valore della variabile, per es. per  $x=0$  si annullano, allora le tre espressioni

$$(27) \quad 1/f(x), \quad f(x)/F(x), \quad F(x)/f(x)$$

diventano tutte indeterminate per  $x=0$ , perchè prendono la forma  $1/0$ ,  $0/0$ ,  $0^0$ . Se ad esse si vuole, nel punto  $x=0$ , attribuire il valore  $k$ , esse si rendono determinate con tale valore scrivendo

$$(28) \quad \frac{1 + k \operatorname{Punt} x}{f(x) + \operatorname{Punt} x}, \quad \frac{f(x) + k \operatorname{Punt} x}{F(x) + \operatorname{Punt} x}, \quad | F(x) + k \operatorname{Punt} x | f(x) + \operatorname{Punt} x.$$

In particolare se  $k = f'(c)/F'(c)$  essendo  $x = c$  il punto in cui le due funzioni si annullano, si ha per la seconda delle (29)

$$(29) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) + f'(x) \text{Punt}(x - c)}{F(x) + F'(x) \text{Punt}(x - c)}$$

e la frazione al secondo membro esprime la funzione  $f(x)/F(x)$  ma assumendo per  $x = c$  il valore  $f'(x)/F'(x)$  in conformità al teorema di L'HOSPITAL.

Si ha così ad esempio come espressione completa della funzione  $x/\text{sen } x$  che sarebbe indeterminata per  $x = 0$ ,

$$(30) \quad \frac{x + \text{Punt } x}{\text{sen } x + \text{Punt } x}$$

che per  $x = 0$  prende appunto il valore 1 e coincide con  $x/\text{sen } x$  per ogni altro valore di  $x$ .