Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Basilio Manià

Una condizione sufficiente per resistenza dell'estremo assoluto nel Calcolo delle Variazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 214–216.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_214_0>

Una condizione sufficiente per l'esistenza dell'estremo assoluto nel Calcolo delle Variazioni [1].

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si dà una condizione sufficiente per l'esistenza dell'estremo assoluto degli integrali quasi-regolari.*

1. La funzione $F(x_1,\ldots, x_k; x_1',\ldots, x_k')$, che, per brevità, si indica con $F(x; x')$, sia finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini rispetto alle x_i', in un insieme di punti $(x; x')$ con x appartenente a un campo A dell'S_k, cioè a un insieme di punti dell'S_k contenente tutti i suoi punti di accumulazione a distanza finita, e x' qualunque, purchè diverso dall'origine. Inoltre, la funzione F sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle x_i'.

Se è sempre

$$\mathcal{E}(x, x'; \tilde{x}) = F(x, \tilde{x}') - \sum_{1}^{k}{}_i F_{x_i'}(x, x')\tilde{x}_i' \geq 0,$$

si dice che l'integrale

$$I_C = \int_C F(x; x')ds,$$

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

dove C è una curva continua e rettificabile del campo A (curva ordinaria), è un integrale quasi-regolare positivo.

Ricordiamo poi le due proposizioni seguenti:

« Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo, preso ad arbitrio un numero positivo L, I_C è una funzione semicontinua inferiormente nella classe delle curve C ordinarie, di lunghezza non superiore ad L » (1).

« Sia γ un angolo minore di $\pi : 2$, $\bar{x}_1',\ldots,\bar{x}_k'$, sieno i coseni direttori di una direzione fissa qualunque, che, per brevità, si indica con $(\bar{x}')$; C sia una curva continua e rettificabile di lunghezza $\mathfrak{L}$ i cui estremi abbiano una distanza non maggiore di Δ. Detta $\mathfrak{L}'$ la misura dello pseudoarco dei punti di C nei quali la direzione della tangente forma con la direzione $(\bar{x}')$ un angolo (fra 0 e π) maggiore di γ, è

(1) $$\mathfrak{L} \leq (2\mathfrak{L}' + \Delta) : \cos\gamma$$ » (2).

2. Ora possiamo dimostrare il seguente

Teorema. — « Sia I_C un integrale quasi-regolare positivo; esistano una direzione $(\bar{x}')$ e due angoli γ_1, γ_2, con la condizione

$$0 \lessgtr \gamma_1 \leq \gamma_2 < \pi : 2,$$

tali che ogni direzione (x'), per la quale è $F(x, x') \leq 0$ in qualche punto del campo A, formi con $(\bar{x}')$ un angolo non maggiore di γ_1, e, detto $-m$ il minimo dei valori non positivi di F, ed M il minimo dei valori di $F(x; x')$, per x punto qualunque del campo A e (x') direzione formante con la direzione $(\bar{x}')$ un angolo non minore di γ_2, sia

(2) $$\frac{1}{2} M \cos\gamma_2 - \left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma_1\right) m > 0.$$

Allora, in ogni classe completa K di curve ordinarie C, tutte appartenenti a una parte limitata A' del campo A, esiste il minimo (assoluto) di I_C ».

Dimostrazione. — Se Δ è il massimo diametro di A' e C è una curva qualunque di K di lunghezza $\mathfrak{L}$, la misura dello pseudoarco dei punti di C nei quali la direzione della tangente forma con la direzione $(\bar{x}')$ un angolo non maggiore di γ_1, è, per la (1)

$$\leq \mathfrak{L}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\gamma_1\right) + \frac{1}{2}\Delta,$$

e la misura dello pseudoarco dei punti di C, nei quali la dire-

(1) Vedi L. Tonelli, *Calcolo delle Variazioni*, vol. I, pag. 292.

(2) Cfr. L. Tonelli, loc. cit., vol. II, pag. 17.

zione della tangente forma con la direzione $(\bar{x}')$ un angolo maggiore di γ_2, è

$$\geq \frac{1}{2}\mathfrak{L}\cos\gamma_2 - \frac{1}{2}\Delta.$$

Ne viene subito

$$I_C \geq \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}M\cos\gamma_2 - \left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma_1\right)m\right\} - \frac{1}{2}\Delta(m+M).$$

e quindi, dalla (2),

$$\lim_{\mathfrak{L}\to\infty} I_C = +\infty.$$

Allora, applicando la prima delle due proposizioni ricordate sopra, si vede che esiste il minimo (assoluto) di I_C in K.

Il teorema ora dimostrato è una lieve generalizzazione di un altro dovuto al prof. TONELLI (1).

ESEMPIO. — Le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte se il campo A è il cerchio $x^2+y^2=1$, ed è

$$F(x, y, x', y') = (x^2+y^2+1)\left(19\sqrt{x'^2+y'^2} - 20x'\right).$$

Per vedere questo, basta porre $(\bar{x}') \equiv (1, 0)$, $\gamma_1 = \operatorname{arc\,cos}\frac{19}{20}$, $\gamma_2 = \pi : 3$, da cui si ha $m = 2$ ed $M = 9$.

(1) Vedi L. TONELLI, loc. cit., vol. II, pag. 27.