BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CONTE

Sull'integrazione dell'equazione differenziale $y' + Py^r + Qy^s = 0$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 216–219.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_216_0>

Sull'integrazione dell'equazione differenziale $y' + Py^r + Qy^s = 0$.

Nota di LUIGI CONTE (a Cagliari).

Sunto. - *L'Autore riconduce lo studio delle equazioni* $y' + Py^r + Qy^s = 0$ *a quello delle equazioni del tipo* $y' + Py^2 + Qy^k = 0$ *e per queste determina un caso d'integrazione estendendo un risultato ottenuto dal* CHIELLINI.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' + Py^r + Qy^s = 0, \tag{1}$$

con P e Q funzioni date di x, finite, continue e derivabili, la quale per $r = 1$ si riduce ad un'equazione di BERNOUILLI. Si può facilmente trasformare la (1) in modo ch'essa risulti del tipo

$$y' + Py^2 + Qy^k = 0. \tag{a}$$

Posto infatti

$$(2) \qquad y = z^{\frac{1}{r-1}}$$

la (1) si trasforma nell'altra

$$z^{\frac{2-r}{r-1}} z' + (r-1) P z^{\frac{r}{r-1}} + (r-1) Q z^{\frac{s}{r-1}} = 0,$$

ossia

$$(1') \qquad z' + (r-1) P z^2 + (r-1) Q z^{\frac{r+s-2}{r-1}} = 0,$$

che è appunto del tipo (a). Lo studio delle equazioni (1) è pertanto sempre riconducibile a quello delle equazioni del tipo (a).

2. Osserviamo che la (1), nel caso di r intero e > 2, si può ridurre alla forma (a) anche mediante il seguente processo iterativo che consiste nel trasformare la (1) in maniera che al posto di r figuri $r - 1$.

Questo procedimento, benchè più laborioso, potrebbe essere utile a farci conoscere, durante i successivi abbassamenti dell'esponente r, particolari casi in cui la (1) si può integrare, eventualmente sotto determinate condizioni restrittive.

Applichiamo infatti alla (1) la sostituzione

$$(3) \qquad y = z^{\frac{r-2}{r-1}};$$

la (1) si trasforma nell'altra

$$(1'') \qquad (r-2) z' + (r-1) P z^{r-1} + (r-1) Q z^{\frac{rs-2s+1}{r-1}} = 0,$$

ed applicando $(r-2)$ volte sostituzioni analoghe la (1) si ridurrebbe alla forma (a).

3. Se $s = 2r - 1$ la (1') diventa

$$(1''') \qquad z' + (r-1) P z^2 + (r-1) Q z^3 = 0.$$

Servendoci quindi dei risultati ottenuti dal CHIELLINI [1] possiamo dire che: « L'equazione

$$y' + P y^r + Q y^{2r-1} = 0$$

nel caso che tra P e Q interceda l'una o l'altra delle seguenti relazioni:

$$(b) \qquad P'Q - PQ' = (r-1) \cdot \frac{n \mp 2m + 3}{(m \mp 3)^2} P^3$$

[1] Vedi « Boll U. M. I. », anno X, n. 5, dicembre 1931.

s' integra colla sostituzione

$$y^{r-1} = z = \frac{(t \pm 1)P}{(m \mp 3)Q}$$

riducendosi rispettivamente alle equazioni differenziali a variabili separate:

$$\frac{dt}{t \pm 1} \pm \frac{(2 \mp m \mp t)dt}{t^2 + (m \mp 1)t \pm n \mp m + 1} = \pm \frac{(r-1)(2m \mp 3 \mp n)}{(m \mp 3)^2} \cdot \frac{P^2 dx}{Q}$$

dove m ed n sono costanti ».

In particolare, si tengano presenti, per la manifesta semplificazione, i casi $m = r + 2$ ed $m = r - 2$.

4. Il Chiellini, nel lavoro citato, aveva dimostrato [1] che l'equazione

$$y' + Py^2 + Qy^3 = 0$$

si sa integrare senz'altro se l'espressione $(P'Q - PQ')$ differisce per un fattore costante da P^3. Questo risultato è suscettibile della seguente generalizzazione.

Consideriamo l'equazione (a) alla quale, come abbiamo visto, si può ridurre la (1), ed eseguiamo la sostituzione:

$$(c) \qquad y = \alpha(z + 1)$$

con α funzione di x da determinarsi opportunamente.

La (a) si trasforma in

$$(4) \quad \alpha z' + Q\alpha^k \sum_0^{k-3} {}_r \binom{k}{r} z^{k-r} + z^2 \left\{ P\alpha^2 + \frac{k(k-1)}{2} Q\alpha^k \right\} + z(\alpha' + 2P\alpha^2 + kQ\alpha^k) + \\ + \alpha' + P\alpha^2 + Q\alpha^k = 0.$$

Se i coefficienti delle potenze di z in quest'equazione differissero per fattori costanti, la (4) si ridurrebbe immediatamente ad un'equazione a variabili separate.

Ed infatti se fosse:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} P\alpha^2 + \dfrac{k(k-1)}{2} Q\alpha^k = mQ\alpha^k, \\ \alpha' + 2P\alpha^2 + kQ\alpha^k = nQ\alpha^k, \\ \alpha' + P\alpha^2 + Q\alpha^k = pQ\alpha^k, \end{cases} \quad (m, n, p \text{ costanti})$$

[1] Ai risultati del Chiellini, oltre che colle sostituzioni $y = \alpha(z \pm 1)$ si può pure pervenire servendosi delle sostituzioni $y = \alpha(z^2 \pm 1)$ od anche delle altre $y = \alpha\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

la (4) diventerebbe

$$(4')\qquad \frac{dz}{\sum_{0}^{k-3} r \binom{k}{r} z^{k-r} + mz^2 + nz + p} + Q\alpha^{k-1}dx = 0.$$

Tra le costanti m, n, p passa il legame

$$(4'')\qquad 2p = (k-1)(k-2) + 2(n-m)$$

che si ottiene sommando la prima e la terza e sottraendo la seconda delle (α).

Ammesso quindi che la $(4'')$ sia verificata, le (α) si riducono alle due seguenti:

$$(\alpha')\qquad \begin{cases} P + \frac{k(k-1)}{2} Q\alpha^{k-2} = mQ\alpha^{k-2}, \\ \alpha' + 2P\alpha^2 + (k-n)Q\alpha^k = 0. \end{cases}$$

Ricavando dalla prima di queste

$$\alpha^{k-2} = \frac{2P}{(2m-k^2+k)Q}$$

derivando e sostituendo nella seconda, dopo alcune trasformazioni si perviene alla relazione [1]:

$$(\beta)\qquad (P'Q - PQ')^{k-2} = \\ = \left(\frac{2}{2m+k-k^2}\right)^{k-1} \cdot [(k-2)(n-2m-2k+k^2)]^{k-2} \cdot P^{2k-3}Q^{k-3}.$$

Risultati analoghi avremmo ottenuti colla sostituzione

$$y = \alpha(z-1).$$

Concludendo: « L'equazione differenziale

$$y' + Py^2 + Qy^k = 0,$$

nel caso che tra P e Q interceda la relazione (β), si integra colla sostituzione

$$y = (z+1) \cdot \left[\frac{2P}{(2m+k-k^2)Q}\right]^{\frac{1}{k-2}}$$

mediante la quale si riduce all'equazione a variabili separate

$$\frac{dz}{\sum_{0}^{k-3} r \binom{k}{r} z^{k-r} + m(z^2-1) + n(z+1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2}} + \\ + Q\left(\frac{2P}{2m+k-k^2}\right)^{\frac{k-1}{k-2}} dx = 0 ».$$

[1] La (β) per $k=3$ si riduce alla relazione trovata dal CHIELLINI.