BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLOS BIGGERI

# Sull'ordine delle sezioni degl'integrali determinanti generalizzati

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **11** (1932), n.4, p. 224–228.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_224_0>

## Sull'ordine delle sezioni degl'integrali determinanti generalizzati.

Nota di CARLOS BIGGERI (Buenos Aires).

Chiameremo *integrale determinante generalizzato*, più brevemente *integrale D*, l'espressione:

$$\int_0^\infty a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot z} \cdot dr, \tag{1}$$

dove: $a(r)$ è una funzione complessa (o reale) della variabile reale $r$, integrabile in ogni intervallo finito; $\lambda(r)$ è una funzione reale, crescente con limite $+\infty$ per $r \to +\infty$, e $z = x + iy$ è una variabile complessa.

Se $\lambda(r) = r$, l'integrale (1) è un integrale determinante ordinario. Nel suo semipiano di convergenza (supponendo che esista) l'integrale (1) definisce una funzione regolare $f(z)$.

La funzione $a(r)$ è la generatrice della funzione $f(z)$.

Chiameremo *sezione fra* 0 *e* r, brevemente *sezione* dell'integrale (1) (anche se l'ascissa di convergenza di (1) sia $+\infty$) l'integrale:

$$g(r, z) = \int_0^r a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z} \cdot d\rho.$$

Ci proponiamo, nella presente Nota, di dimostrare una proprietà relativa all'ordine di crescenza della funzione $g(r, z)$ (in particolare della funzione $f(z)$, quando questa esista) per $|y| \to \infty$.

TEOREMA. — *Supponiamo che esista un numero fisso* $z_0 = x_0 + iy_0$ *(il quale può essere reale) tale che si verifichino per ogni* r *dell'intervallo* $0 \leq r < +\infty$, *le disuguaglianze*

$$\left| a(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot z_0} \right| < k_1$$
$$|A(r)| < k_2$$

*dove si ha:*

$$A(r) = \int_0^r a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \cdot d\rho$$

*essendo* $k_1$ *e* $k_2$ *costanti.*

*Supponiamo ancora che* $\lambda(r)$ *sia derivabile e* $\lambda(0) \geq 0$.

*Con queste ipotesi, si ha che:*

$$g(r, z) = 0(y)$$

*uniformemente nel semipiano* $R(z) = x > x_0 + \varepsilon$ *(qualunque sia* $\varepsilon > 0$) *e per ogni valore di* r*; vale a dire: dati arbitrariamente due numeri positivi* $\varepsilon$ *e* $\delta$, *esiste un* $y_0 = y_0(\delta, \varepsilon) \geq 0$, *tale che per ogni* z *la cui parte reale è maggiore di* $x_0 + \varepsilon$, *e per ogni* r *dell'intervallo* $(0, +\infty)$, *si ha:*

$$\left| \frac{g(r, z)}{y} \right| < \delta,$$

*sempre che si abbia* $|y| > y_0$.

DIMOSTRAZIONE. — Sia $R$ un valore compreso fra 0 od $r$. Abbiamo dunque che:

$$g(r, z) = \int_0^r a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot (z - z_0)} \cdot d\rho = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{2}$$

essendo:

$$(3) \qquad I_1 \equiv \int_0^R a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot (z - z_0)} \cdot d\rho$$

$$(4) \qquad I_2 \equiv A(r) \cdot e^{-\lambda(r) \cdot (z - z_0)}$$

$$(5) \qquad I_3 \equiv - A(R) \cdot e^{-\lambda(R) \cdot (z - z_0)}$$

$$(6) \qquad I_4 \equiv - \int_R^r A(\rho) \cdot de^{-\lambda(\rho) \cdot (z - z_0)}.$$

Essendo $\lambda(r) \geq \lambda(0) \geq 0$, nel semipiano $R(z) = x > x_0 + \varepsilon$, da (3) si deduce:

$$(7) \qquad | I_1 | \leq \int_0^R \left| a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \right| \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot (x - x_0)} \cdot d\rho < k_1 \cdot \int_0^R d\rho = k_1 \cdot R;$$

secondo (4):

$$(8) \qquad | I_2 | = | A(r) | \cdot e^{-\lambda(r) \cdot (x - x_0)} \leq | A(r) | < k_2;$$

secondo (5):

$$(9) \qquad | I_3 | = | A(R) | \cdot e^{-\lambda(R) \cdot (x - x_0)} \leq | A(R) | < k_2;$$

tenendo conto che:

$$\left| de^{-\lambda(\rho) \cdot (z - z_0)} \right| = - \frac{| z - z_0 |}{x - x_0} \cdot de^{-\lambda(\rho) \cdot (x - x_0)}$$

dalla (6) si deduce:

$$| I_4 | \leq - \int_R^r | A(\rho) | \cdot \frac{| z - z_0 |}{x - x_0} \cdot de^{-\lambda(\rho) \cdot (x - x_0)} <$$

$$< k_2 \cdot \frac{| z - z_0 |}{x - x_0} \cdot \left[ e^{-\lambda(R) \cdot (x - x_0)} - e^{-\lambda(r) \cdot (x - x_0)} \right]$$

oppure:

$$(10) \qquad | I_4 | < k_2 \cdot \frac{| z - z_0 |}{x - x_0} \cdot e^{-\lambda(R) \cdot (x - x_0)}.$$

Dalla (10) si deduce:

$$(11) \qquad | I_4 | < k_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{(y - y_0)^2}{\varepsilon^2}} \cdot e^{-\lambda(R) \cdot \varepsilon}.$$

Secondo (2), (7), (8), (9) e (11), abbiamo

$$(12) \qquad \left| \frac{g(r, z)}{y} \right| < k_1 \cdot \frac{R}{| y |} + 2k_2 \cdot \frac{1}{| y |} + k_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left( 1 - \frac{y_0}{y} \right)^2} \cdot e^{-\lambda(R) \cdot \varepsilon}.$$

Se adesso supponiamo $R \geq r$, abbiamo:

$$
(13) \qquad \left|\frac{g(r,\, z)}{y}\right| \leq \frac{1}{|y|} \cdot \int_0^R \left| a(\rho) \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \right| \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot (x - x\ )} \cdot d\rho +
$$

$$
+ \frac{1}{|y|} \cdot \int_r^R \left| a(\rho)\ e^{-\lambda(\rho) \cdot z_0} \right| \cdot e^{-\lambda(\rho) \cdot (x - x_0)} \cdot d\rho <
$$

$$
< \frac{1}{|y|} \cdot k_1 \cdot R + \frac{1}{|y|} \cdot k_1 \cdot (R - r) = k_1 \left( \frac{2R}{|y|} - \frac{r}{|y|} \right).
$$

Facendo:

$$
R = + \sqrt{|y|}
$$

la (12) risulta:

$$
(14) \qquad \left|\frac{g(r,\, z)}{y}\right| < k_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{|y|}} + 2k_2 \cdot \frac{1}{|y|} + k_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(1 - \frac{y_0}{y}\right)^2} \cdot e^{-\lambda(R) \cdot \varepsilon}
$$

e la (13) ne diviene:

$$
(15) \qquad \left|\frac{g(r,\, z)}{y}\right| < k_1 \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{|y|}} - \frac{r}{|y|} \right).
$$

Sia adesso $\delta$ un numero positivo preso arbitrariamente. Siccome: $\lim \lambda(r) = +\infty$ per $r \to +\infty$, i secondi membri della (14) e (15) sono minori di $\delta$ partendo da un certo valore $y_0 = y_0(\delta, \varepsilon)$; poniamo:

$$
R_0 = + \sqrt{|y_0|}.
$$

Secondo la (14) se $r > R_0$ e secondo la (15) se $r \leq R_0$, si ha per ogni $z$ la cui parte reale sia maggiore di $x_0 + \varepsilon$ e per ogni $r$ dell'intervallo $0 \leq r < +\infty$:

$$
(16) \qquad \left|\frac{g(r,\, z)}{y}\right| < \delta.
$$

Se la funzione $f(z)$ esiste, (cioè, se l'ascissa di convergenza eventuale $k$ di (1) è finita o uguale a $-\infty$, supponendo che $x_0 > k$, nel qual caso la limitazione di $A(r)$ è una conseguenza), passando al limite per $r \to +\infty$ in entrambi i membri della (16), si ha che:

$$
(17) \qquad \left|\frac{f(z)}{y}\right| \leq \delta
$$

vale a dire $f(z) = 0(y)$ uniformemente nel semipiano $R(z) = x > x_0 + \varepsilon$.

Chiamiamo $\mu(x)$ l'ordine della funzione $f(z)$ sulla retta, parallela all'asse $y$, di ascissa $x$, cioè:

$$
\mu(x) = \overline{\lim_{y \to \infty}} \frac{\log |f(x + iy)|}{\log |y|}.
$$

Dalla (17) si deduce che:

$$\frac{\log|f(x+iy)|}{\log|y|} \leq 1 + \frac{\log \delta}{\log|y|}$$

donde

(18) $$\mu(x) \leq 1$$

per ogni $x > x_0$.

Chiamiamo $\nu(x_0)$ l'ordine della funzione $f(z)$ nel semipiano $R(z) = x > x_0$, cioè:

$$\nu(x_0) = \overline{\lim_{y \to \infty}} \frac{\log E(y)}{\log|y|},$$

dove $E(y)$ è l'estremo superiore della funzione $f(z)$ in detto semipiano. Siccome la disuguaglianza (17) si verifica uniformemente nel semipiano $x > x_0 + \varepsilon$, si ha che:

$$\nu(x_0 + \varepsilon) \leq 1$$

per ogni $\varepsilon > 0$, e pertanto si ha:

$$\nu(x_0) \leq 1.$$

Tenendo conto della disuguaglianza (18) e poichè la funzione $f(z)$ è regolare nel semipiano $x > x_0 > k$, in virtù d'un classico teorema di LINDELÖF si deduce che $\mu(x)$ *è una funzione convessa di* x *nell'intervallo* $x_0 < x < +\infty$.

Abbiamo supposto la derivabilità della funzione $\lambda(r)$ al fine di semplificare la dimostrazione; in caso contrario può farsi uso di integrali di STIELTJES.

Se $\lambda(0)$ fosse negativo, esisterebbe necessariamente un valore finito $p$ tale che $\lambda(p)$ sia positivo o nullo. Il teorema in questo caso è pure vero se l'integrale:

$$\int_0^p |a(r)| \cdot dr$$

ha un valore finito.