UMI

Recensioni

* Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind (B. Levi)
* R. L. Moore: Foundations of Point Set Theory (B. Levi)
* N. Kryloff: Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique et de la science de l'ingénieur (T. Levi-Civita)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 234–241.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_234_0>

RECENSIONI

GEORG CANTOR: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind. — Herausgegeben von E. Zermelo nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel.* Berlin, Springer, 1932, p. 486 + V. RM. 48.

R. L. MOORE: *Foundations of Point Set Theory.* « American Mathematical Society Colloquium Publications ». Vol. XIII. 1932, p. 486 + V. Doll. 5.

Osserva lo ZERMELO, nella prefazione al Volume delle Opere del CANTOR, essere raro il caso che un ramo fondamentale della Scienza sia dovuto interamente alla creazione di un solo: questo caso si verifica, per la Teoria degli Aggregati, nell'opera di G. CANTOR, perchè, se il ramo di scienza da lui fondato si mostrò subito e sempre più in seguito pieno d'interesse e di suggestione per le ricerche dei matematici, arricchendosi di una bibliografia poderosa, fu l'opera assidua del CANTOR, durata poco meno di un venticinquennio (dal 1874 al 1897) in lotta contro consuetudini mentali, malintesi e scetticismi iniziali, che ne gettò completamente le basi. In verità si può anche restringere alquanto il periodo dell'attività creatrice (la produzione del CANTOR è di fatto relativamente poco voluminosa) e ridurlo al decennio fra il 1874 e il 1884, e forse anche a meno; si può anche dimostrare solo apparente l'isolamento iniziale del pensiero del CANTOR, e vederne la fonte in idee agitanti il pensiero matematico del tempo; e ne emerge tuttavia maggiormente l'impronta del genio che da incertezze, contraddizioni e preoccupazioni metafisiche ha saputo trar fuori un sistema coerente di concetti matematici e rispondere ai più impellenti quesiti che essi ponevano. Nel 1851 il BOLZANO aveva pubblicato le sue *Paradoxen des Unendlichen*: nel 1870 l'HANKEL aveva enunciato il principio della condensazione delle singolarità, strumento importante per la produzione di esempi di funzioni dai caratteri meno comuni: le discussioni sopra la « metafisica del calcolo infinitesimale » si erano concluse col rigetto definitivo dell'*infinite-*

simo attuale: nel 1878 il DINI pubblica i suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Negli anni 1870-72 G. CANTOR, indirizzato dallo HEINE ad occuparsi delle serie trigonometriche, mentre stabilisce il teorema rimasto classico col suo nome, vi trova la prima occasione a riflessioni sopra i sistemi di infiniti numeri e nella Memoria del 1872: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, per la prima volta introduce la parola *aggregato (Menge)* (una parola! una nozione e quanto preziosa per i prossimi sviluppi dell'analisi) e la nozione di *aggregati derivati successivi.* Nel 1874 egli scopre la numerabilità dell'aggregato dei numeri algebrici e la non–numerabilità dell'aggregato dei numeri reali. Cosa notevole! la scoperta di questa non–numerabilità, che il CANTOR medesimo dichiara essergli costata molti vani tentativi, scoperta fondamentale perchè per la prima volta chiarisce una *diversità fra gli infiniti*, e, sviluppata poi dal CANTOR medesimo nel noto « procedimento diagonale », lo condusse alla nozione della illimitata successione crescente delle *potenze*, è dissimulata quasi con pudore nel titolo della Memoria: *Ueber eine Eigenschaft des Begriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, ove l'argomento principale non compare e la parola « reali » è, come lo ZERMELO osserva, del tutto superflua, ma ben si spiega nel pensiero teso alla « totalità dei numeri *reali* » (l'indipendenza della potenza dalla dimensione non gli era ancora nota!).

Così fra il 1872 e il 1874 nasceva, matura nei suoi concetti fondamentali, la teoria matematica dell'infinito: nel 1878 anche il suo nome *Mannigfaltigkeitslehre* (più tardi, più semplicemente, *Mengenlehre, Teoria degli aggregati*): e il nome della *potenza (Mächtigkeit)* e la ricordata indipendenza di questa dalla *dimensione*, cui tosto seguirono gli sforzi di LÜROTH, THÔMAE, JURGENS, del CANTOR medesimo per caratterizzare mediante la continuità l'essenziale intuizione della dimensione degli aggregati. Una teoria matematica dell'infinito contro la quale solo gli errori e le prevenzioni ispirati dalla consuetudine possono aver sollevato obiezioni d'ordine metafisico (in particolare una supposta contrapposizione alle conclusioni ormai fuori discussione contrarie all'infinitesimo attuale nel Calcolo): molte pagine scritte dal CANTOR per la difesa del suo pensiero contro tali opposizioni possono essere storicamente interessanti ma debbono essere matematicamente rammaricate; d'altronde il CANTOR medesimo cadeva negli stessi malintesi quando respingeva l'infinitesimo attuale del VERONESE, del THOMAE, ecc..

Col 1879 incomincia il periodo in cui il CANTOR, acquistata la coscienza sicura della intima consistenza della Sua creazione in teoria autonoma, intende, non solo ad arricchirla di nuovi risultati, ma anche a presentare questi e quelli precedentemente acquisiti in forma sistematica, così da attrarre meglio su di essi l'interesse dei matematici: così, abbandonando il punto di vista iniziale, nel quale incentivo alla ricerca erano gli aggregati di numeri (o di *punti*), egli fonda la teoria degli *aggregati astratti*: è noto che in questa egli fu indotto ad ammettere implicitamente un postulato che, precisato dallo ZERMELO, è ora generalmente ricordato col nome di questi, e ad affermazioni relative alla « confrontabilità » degli aggregati che nè lui, nè gli sforzi dei ricercatori posteriori poterono mai porre sul terreno della certezza matematica: ricordiamo la coincidenza della potenza del continuo colla 2^a potenza *alef-uno*. La limpidezza della esposizione, l'unità del pensiero che caratterizza lo svolgersi nel tempo delle ricerche del CANTOR, unità appena accresciuta e meglio posta in evidenza dal raccoglitore col disporre le Memorie secondo l'argomento *(Teoria dei numeri e Algebra, Teoria delle Funzioni, Teoria degli aggregati, Storia della matematica e filosofia dell'infinito)* e nei singoli gruppi per ordine di data (il quale ordinamento ben pochi spostamenti induce tuttavia rispetto al puro ordine cronologico), fanno sì che la pubblicazione di queste Opere non si presenti soltanto come un degno monumento alla memoria dell'Uomo, o come documento e ricordo di un pensiero ormai assorbito dalla Scienza, o come un gradito mezzo per rinnovare godimenti spirituali d'altro tempo in chi l'opera del CANTOR potè leggere nel momento in cui, superati gli ostacoli misoneistici, quelle idee presero trionfalmente le vie della classicità scientifica, ma sì anche come quella di un trattato fondamentale e di una facile iniziazione cui ancora oggi può attingere il principiante; non superata dalle molteplici trattazioni posteriori, cui è spesso di vincolo il compito inevitabile di indugiarsi sopra affinamenti di particolari e complicazioni di concetti che la cresciuta maturità dell'argomento è venuta portando.

La raccolta delle Memorie è completata, come il titolo medesimo indica, da una scelta di lettere al DEDEKIND, scritte fra il 28 luglio e il 30 agosto 1899: *Briefwechsel* dice il titolo, sebbene una sola sia la lettera del DEDEKIND (importante questa perchè contiene una dimostrazione del noto teorema CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN, non essenzialmente differente da quelle di SCHRÖDER-BERNSTEIN (1897) e dello ZERMELO (1908)), lasciando così nel lettore un certo desiderio, sia di conoscere qualcosa di più delle risposte del DEDEKIND, sia di vedere la scelta estesa a più remoti periodi della lunga amicizia dei due forti pensatori. Rileviamo in queste lettere la distinzione fra *multiplicità consistenti* o *aggregati* e *multiplicità inconsistenti*, le prime *pensabili come un tutto*, le seconde non; nozione mediante la quale il CANTOR intende superare le antinomie del tipo di BURALI–FORTI, RUSSELL e analoghe: forse un po' poco chiara, ma che pare coincidente, nel concetto, con uno esposto indipendentemente più tardi e con maggior precisione dallo scrivente.

In fine di ciascuna Memoria sono inserite, insieme ad alcuni pochi complementi dell'A., importanti note e osservazioni bibliografiche dello ZERMELO. Il volume è arricchito di una interessante Notizia bio–bibliografica ad opera del FRAENKEL (alquanto più concisa tuttavia di quella del medesimo Autore nel « Jahresbericht d. d. Math. Vereining. », Bd. 39, 1930, cui occorre rinviare anche per il completo elenco cronologico delle pubblicazioni e delle fonti biografiche), di un bel ritratto del CANTOR e di un indice dei termini più importanti.

***

I *Fondamenti* del MOORE, oppostamente al carattere di iniziazione delle Memorie del CANTOR, sono uno studio critico–assiomatico: e se il titolo accenna indeterminatamente alla *teoria degli aggregati di punti*, il contenuto, come d'altronde avverte la prefazione, si indirizza più precisamente a stabilire un sistema di postulati capace di servire di fondamento all'*analysis situs bidimensionale*. Per la forma esteriore della redazione si può avvicinare al classico modello dei « Grundlagen der Geometrie » dell'HILBERT: gli *assiomi* (noi preferiremmo dire *postulati*) sono presentati a gruppi, ricercandosi successivamente via via sistemi di proposizioni la cui dimostrazione dipende da questi singoli gruppi e senza trascurare di porre in evidenza, mediante esempî, la generalità e l'indipendènza di dette ipotesi. Corrispondentemente il volume è diviso in sette capitoli intitolati, i primi sei, dai gruppi di postulati posti a fondamento: l'ultimo riguarda invece la nozione di *distanza* e le corrispondenze continue *(equivalenze topologiche)*.

Il portare un giudizio completo sopra un'opera di questo programma e di questa mole non è possibile in un esame di essa a scopo di recensione: una prima osservazione noi vorremmo fare, che riguarda piuttosto la forma dell'esposizione che non la sostanza; ed è la mancanza di qualche considerazione che, mentre serva di orientamento nel pensiero dell'Autore, tenga conto della relativa arbitrarietà che esiste in ogni assetto logico di una teoria, per la quale (fatte poche eccezioni) non si può dire che *tali* siano gli assiomi, bensì soltanto che *tale sia un sistema possibile di* *assiomi, qualora si assumano tali idee primitive.* Le idee primitive assunte sono quelle di *punto* e di *regione*: ne sarebbe stata consigliabile l'affermazione esplicita, perchè il numero delle parole di significato proprio alla teoria usate negli enunciati dei postulati è incomparabilmente maggiore, ma alle due suddette si riduce tenendo conto delle definizioni. Il post. 0 afferma soltanto che « regione è un aggregato di punti »: la primitività della nozione di regione permette, in modo noto, di definire quella di « punto limite di un aggregato » indipendentemente da ogni nozione di distanza, dando tal nome a un punto quando ogni regione che lo contenga, contenga pure punti dell'aggregato diversi da esso. L'assioma 1 appare in verità la riunione di due e forse più postulati che potevano rimanere utilmente distinti: si sa che il riunire più affermazioni in una sola non può essere logicamente oggetto di critica: ciò nondimeno pare opportuno di numerare separatamente quelle affermazioni il cui significato intuitivo è veramente disgiunto. La prima parte dell'assioma afferma sostanzialmente la scomponibilità dello spazio in sistemi di infinite celle (regioni) arbitrariamente piccole (tali cioè che, assegnata arbitrariamente una coppia di punti distinti, esista uno di questi sistemi di cui nessuna cella contenga i detti due punti). (È contenuta in questa affermazione l'esistenza di infiniti punti, e l'esistenza per ogni punto, di regioni che lo contengono: con l'assioma 7 si porterà un complemento importante alla predetta affermazione, postulando la *separabilità* dello spazio). L'altra parte dell'assioma 1 equivale sostanzialmente all'affermazione che una successione di aggregati chiusi contenuti l'uno nell'altro ha almeno un punto comune a tutti. L'assioma 2 ha per ufficio di consentire la nozione di « intorno di un punto », poichè postula che « ogni punto di una regione è contenuto in un dominio connesso contenuto in essa », *dominio* essendo a sua volta un aggregato di punti tale che ogni suo punto è contenuto in una regione completamente interna ad esso. Le conseguenze degli assiomi 0, 1, 2 occupano i primi due capitoli e riguardano proposizioni vere in spazi di estrema generalità (compreso lo spazio Hilbertiano di infinite dimensioni). Ancora grande generalità ha l'assioma 3 col quale si postula che la soppressione di un punto qualunque non interrompe la connessione dello spazio. Soltanto mediante gli assiomi 4 e 5 si postula finalmente la bidimensionalità dello spazio coll'affermare che la sua connessione è spezzata da una qualunque curva chiusa e che mediante una (conveniente) curva chiusa si possono separare due punti arbitrari dello spazio. Gli assiomi 5_2 e 6 (a cui 5_1 ha principalmente ufficio preparatorio) sono in certo modo complementari al post. 5 poichè il primo domanda che una curva aperta avente un estremo interno ad un dominio connesso non lo spezza, mentre il secondo postula che la separazione fra due aggregati entrambi non compatti non può essere costituita da un aggregato compatto: (riguardo al post. 6 si potrebbe osservare che la parola « separa » vi ha preso un significato *intuitivo*, non identico a quello *definito* (alla p. 34)).

Ai postulati proprî alla teoria spaziale che si studia l'A. aggiunge il noto « postulato di ZERMELO » o « della scelta » al quale — appartenendo esso alla teoria generale degli aggregati astratti — sono destinate le 4 pagine dell'introduzione: è opinione nostra che non opportunamente sia invalso l'uso, precisamente ove si tratta di taluni argomenti critici, di chiedere in blocco l'accettazione di questo postulato mentre un'analisi più minuta, anche quando non dovesse riuscire a portare completamente i ragionamenti nel campo del numero finito di scelte, mostrerebbe tuttavia la possibilità di restare in un dominio logico più vicino a quello della intuizione e della vera tradizione matematica.

Queste osservazioni e qualche altra che si potrebbe fare sulla correzione tipografica o sul collocamento di alcune proposizioni (una volta che l'A. intende classificarle in ragione dei postulati che vi trovano applicazione) non diminuiscono l'importanza del Volume come fondamento della assiomatica topologica: bene al contrario l'esame accurato delle singole proposizioni e del loro ordinamento logico, della perfetta enunciazione delle ipotesi in ciascuna di esse, mostra chiaramente come si tratti di opera di lunga lena, raccogliente, come indica l'A. nella prefazione, il lavoro di 4 o 5 anni durante i quali egli volle astenersi da pubblicazioni frammentarie per conservare al volume in preparazione l'interesse della unità e della completezza. Onde si può pensare ed augurare che la sua ricerca costituisca per la detta assiomatica un punto di partenza assimilabile a quello che, per lo studio dei fondamenti della Geometria, fu la « Neuere Geometrie » del PASCH.

Il volume si conclude con un breve indice delle parole più importanti (utilissimo perchè qui, come in altre ricerche sui fondamenti, la necessità di distinguere concetti porta a non usare spesso le parole nel loro significato intuitivo); con un'abbondantissima bibliografia delle ricerche topologiche recenti; e con una appendice nella quale, a rimediare alla mancanza quasi assoluta nel testo di richiami bibliografici, si dà un cenno sommario sulla storia e la paternità di alcune delle principali nozioni e proposizioni.

B. LEVI

N. KRYLOFF: *Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique et de la science de l'ingénieur.* Collection de monographies scientifiques, T. 1, Kiew, 1932, 251 pp. (in russo). Parzialmente riassunta in varie Note dei « Comptes Rendus » (T. 194, 1° semestre 1932) di N. KRYLOFF e N. BOGOLIUBOFF.

Alcuni mesi or sono fu in questo « Bollettino » (anno X, n. 4, pp. 231-233) richiamata l'attenzione degli studiosi sopra i notevoli contributi apportati da KRYLOFF e BOGOLIUBOFF ai metodi di soluzione approssimata di alcuni problemi fondamentali di fisica matematica. Fu allora espresso il desiderio che l'importante materia e le sue più cospicue applicazioni venissero diffusamente trattate in un'opera sistematica.

Risponde al voto la monografia, di cui ho sopra riportato il titolo. Ma essa è scritta in russo, ed io non sono in grado di recensirla, sicchè mi limito a segnalarne l'avvenuta pubblicazione a chi ne possa approfittare nella veste attuale. Io rimango, con molti altri, in attesa di una traduzione, o rimaneggiamento, in lingua più familiare. Posso per altro desumere fin d'ora dalle Note dei « Comptes Rendus », citate assieme alla monografia, un felice saggio delle applicazioni consentite dai metodi penetranti dei signori KRYLOFF e BOGOLIUBOFF.

Si tratta delle oscillazioni in circuiti *non* lineari. Negli esempi classici della meccanica e nei casi usuali delle correnti elettriche bastavano le equazioni lineari. Nella tecnica e nella elettrotecnica moderna non è più così, e d'altra parte anche le leggi biologiche della convivenza di più specie secondo il VOLTERRA e la teoria delle Cefeidi in astronomia sono dominate da equazioni non lineari.

Gli Autori hanno approfondito il caso di vibrazioni forzate, la cui intensità $I(t)$ verifichi una equazione della forma

$$\ddot{I} + \omega^2 I = \varepsilon f(\dot{I}) + E \sin \alpha t, \tag{1}$$

dove ω, ε, E, α sono costanti assegnate e f una funzione *qualsiasi* dell'argomento indicato. L'ipotesi particolare di una f lineare riporta al caso ordinario di vibrazioni forzate, intrattenute da una azione (per es. forza meccanica, forza elettromotrice, ecc.) di tipo sinusoidale, cui si collega una ben determinata condizione di risonanza.

Per f generica, si potrebbe sfruttare la presenza del parametro ε, sviluppando l'incognita I secondo le potenze di tale argomento. Ma sviluppi del genere non si prestano (come è ben noto da quelli procedenti secondo le masse in meccanica celeste) a considerazioni asintotiche. Con analisi molto elevata, cui si riattaccano altri sviluppi, vien fatto agli AA. di riconoscere e di precisare il carattere quasi-periodico (nel senso di BOHR) della funzione $I(t)$. Come frequenze ammesse dai varî suoi termini figurano, oltre alla α dell'eccitazione:

a) (come nel caso lineare) una frequenza *propria* Ω che dipende da α e dalle costanti della (1), cioè dalla struttura dell'oscillatore;

b) infinite altre frequenze, che implicano talvolta risonanze ignote allo schema classico, suscettibili di destarsi in corrispondenza, sia di multipli, sia anche di *sottomultipli* di Ω.

L'eventualità dei sottomultipli rimane sistematicamente esclusa, quando l'azione esterna, cioè la costante $|E|$, è abbastanza grande. Altra conseguenza della teoria (che si ottiene attribuendo ad f una espressione sagacemente costruita dall'ing. VAN DER POL) è una giustificazione luminosa della completa sincronizzazione (dell'effetto $I(t)$ alla causa $E \sin \alpha t$) che può ottenersi, per piccola che sia E, con opportuna scelta di ω, cioè di modalità del circuito.

Assieme alle proprietà generali, sono abbozzati i criteri di calcolo effettivo, e date formule finali, senz'altro praticamente utilizzabili negli svariati problemi retti dalla (1): tra cui figurano quelli di radiotelegrafia e radiotelefonia.

Gli Autori terminano la serie di Note in rassegna col seguente apprezzamento:

« I (nostri) metodi.... riescono efficacemente applicabili a molte altre questioni tecniche, per es. vibrazioni di certi macchinari, stabilità longitudinale degli aeroplani, e in parecchi capitoli della fisica matematica moderna (meccanica quantica). Essi dovrebbero schiudere la via alla creazione di una meccanica generale non lineare ».

T. LEVI-CIVITA