
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO ASCOLI

Funzioni antiarmoniche in un dominio circolare

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 11 (1932), n.5, p. 263–265.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_263_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_263_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

PICCOLE NOTE

Funzioni antiarmoniche in un dominio circolare.

Nota di GUIDO ASCOLI (a Pisa) (*).

Sunto. - *Si comunicano i risultati ottenuti nella ricerca di funzioni antiarmoniche in un cerchio, cioè ortogonali ad ogni funzione sommabile, armonica entro il cerchio; e di successioni di funzioni antiarmoniche tali che ogni funzione sommabile nel cerchio e ad esse ortogonale è equivalente a una funzione armonica.*

Le funzioni armoniche offrono un interessante campo di applicazione dei concetti relativi agli spazi lineari astratti, di cui mi sono recentemente occupato in due lavori degli « Annali di Matematica ». Avviene infatti che le funzioni armoniche entro un certo dominio quadrabile σ e che in virtù di opportune condizioni al contorno, appartengono a certi spazi funzionali, costituiscano entro questi una varietà lineare. Tale è il caso delle funzioni, armoniche entro σ e continue al contorno, nello spazio C delle funzioni continue in σ , con la seguente espressione della distanza di due elementi $f(P)$, $g(P)$:

$$(f, g) = \max |f - g| \text{ in } \sigma;$$

e lo stesso avviene per le funzioni armoniche in σ (o equivalenti a funzioni armoniche) tali da riuscire in σ sommabili o a quadrato sommabile, nei rispettivi spazi L , o L_2 , di tutte le funzioni sommabili o a quadrato sommabile in σ , con la metrica definita da:

$$(f, g) = \int_{\sigma} |f - g| d\sigma, \quad (f, g) = \left[\int_{\sigma} (f - g)^2 d\sigma \right]^{1/2}.$$

Ora la teoria degli spazi lineari conduce per questi casi ad asserire che la detta varietà appartiene a qualche iperpiano, o, in termini analitici, che esistono funzionali lineari di f che si annullano quando f è armonica; più precisamente, che la varietà è in-

(*) Comunicazione letta alla XXI Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Ottobre 1932.

tersezione di un'infinità numerabile di iperpiani, cioè che le funzioni armoniche possono caratterizzarsi entro lo spazio mediante l'annullarsi di una successione di funzionali lineari.

La ricerca diretta di siffatti funzionali e successioni appare assai interessante e non è del resto difficile; ma i risultati che ho potuto ottenere in generale non hanno alcuna utilità pratica. Qualcosa di meglio può farsi particolarizzando il campo, come ho potuto mostrare per il caso di un campo circolare, riferendomi allo spazio L , come il più ampio di quelli considerati. Prendendo il funzionale sotto la forma (di STEINHAUS)

$$A(f) = \int_{\sigma} f(P)g(P)d\sigma(P),$$

la $g(P)$ deve essere sommabile e limitata e tale che $A(f)$ si annulli se f è armonica; cioè ortogonale a tutte le funzioni armoniche nel campo. Chiamo *antiarmonica* una tale funzione. Sono per es. antiarmoniche le funzioni espresse in coordinate polari ρ, θ da

$$u_{m,n}(\rho, \theta) = \rho^m \cos m\theta \left(\rho^{2n} - \frac{m+1}{m+n+1} R^{2n} \right),$$

$$v_{m,n}(\rho, \theta) = \rho^m \sin m\theta \left(\rho^{2n} - \frac{m+1}{m+n+1} R^{2n} \right)$$

$$(R \text{ raggio del cerchio; } m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

e anzi il loro complesso risponde alla condizione suaccennata; cioè una funzione ortogonale a tutte le $u_{m,n}, v_{m,n}$ è equivalente ad una funzione armonica.

Il noto procedimento di SCHMIDT permette di sostituire a queste funzioni il sistema ortogonale seguente:

$$U_{m,n}(\rho, \theta) = \rho^m \cos m\theta \cdot F\left(-n, m+n+1, m+1, \frac{\rho^2}{R^2}\right),$$

$$V_{m,n}(\rho, \theta) = \rho^m \sin m\theta \cdot F\left(-n, m+n+1, m+1, \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

dove compaiono, come si vede, polinomi ipergeometrici o di JACOBI. Facilmente esso si riduce poi a forma normale. Esso permette lo sviluppo in serie (convergente in media) di ogni funzione antiarmonica.

Questo sistema può porsi in relazione con un altro ben noto: quello delle funzioni:

$$\varphi_m(\rho, \theta) = \rho^m \cos m\theta, \quad \psi_m(\rho, \theta) = \rho^m \sin m\theta$$

ortogonale e formato di funzioni armoniche. Si dimostra che esso è una base in L per le funzioni armoniche entro σ , cioè che si può approssimare a meno di ε ogni funzione armonica nel campo

mediante combinazioni lineari delle φ_m e ψ_m . I due sistemi formano nel loro complesso un sistema ortogonale completo.

Le dimostrazioni, nelle condizioni poste, offrono qualche punto delicato. Più facili sono in L_2 , dove in sostanza la questione si riduce alla costruzione di un sistema complementare a quello φ_m, ψ_m , problema trattato in generale da LAURICELLA e SEVERINI. Ogni funzione f di L_2 ammette allora uno sviluppo in cui si possono raccogliere i termini armonici e quelli antiarmonici, in modo da decomporre f in una parte armonica e in una antiarmonica. La decomposizione è unica, e la parte armonica non è altro che la *armonica viciniore* di LEVI-CIVITA, cioè la funzione armonica che più si approssima in media alla funzione f .