LUIGI CONTE

Sopra una classe d'equazioni integrali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

Sopra una classe d'equazioni integrali.

Nota di LUIGI CONTE (a Cagliari).

Sunto. - *L'A. considera equazioni integrali la cui soluzione è ricondotta a quella di un'equazione differenziale lineare del primo o del secondo ordine, e per queste ultime mostra alcuni casi di integrazione in termini finiti.*

1. Consideriamo l'equazione integrale

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x e^{mx+ny}\varphi(y)dy \tag{1}$$

dove m ed n sono costanti arbitrarie, e calcoliamone i nuclei iterati.

Posto $\sigma = m + n$, si trova facilmente che

$$k_r(x, y) = \begin{cases} k_1(x, y)\dfrac{(e^{\sigma x} - e^{\sigma y})^{r-1}}{(r-1)!\,\sigma^{r-1}} & \text{se } \sigma \neq 0 \\[2ex] k_1(x, y)\dfrac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!} & \text{se } \sigma = 0 \end{cases}$$

onde, nei due casi, le soluzioni rispettive della (1) sono

$$\varphi(x) = f(x) + e^{mx + \frac{e^{x\sigma}}{\sigma}}\int_0^x e^{ny - \frac{e^{\sigma y}}{\sigma}} f(y)dy$$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{e^{(n-1)x}}\int_0^x e^{(n-1)y}f(y)dy.$$

2. Mostriamo ora come la (1) si possa ricondurre ad un'equazione differenziale del primo ordine. Posto:

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)dy \tag{2}$$

si ha con l'integrazione per parti

$$\int_0^x e^{ny}\varphi(y)dy = e^{nx}\psi(x) - n\int_0^x e^{ny}\psi(y)dy$$

onde la (1) si scrive

$$f(x) = \varphi(x) - e^{\sigma x}\psi(x) + ne^{mx}\int_0^x e^{ny}\psi(y)dy$$

od anche

$$f(x) = \varphi(x) - z \tag{1'}$$

con

$$z = e^{\sigma x}\psi(x) - ne^{mx}\int_0^x e^{ny}\psi(y)dy. \tag{a}$$

Dalla (a) per derivazione si deduce

$$z' - mz = e^{\sigma x}\psi'(x)$$

e per le (2) ed (1')

$$z' - z(m + e^{\sigma x}) - e^{\sigma x}f(x) = 0. \tag{3}$$

E così la soluzione della (1) è ricondotta a quella della (3) per la quale, data la natura della z, dev'essere soddisfatta la relazione $z(0) = 0$.

Se fosse $\sigma = 0$, la (3) diventerebbe

$$z' - z(1 + m) - f(x) = 0. \tag{3'}$$

Più in generale: « L'equazione

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x e^{mf_1(x) + nf_2(y)}\varphi(y)dy \tag{4}$$

ove m ed n sono costanti arbitrarie ed f_1, f_2 funzioni note derivabili, colle posizioni

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)dy;$$

$$\varphi(x) - f(x) = z = e^{mf_1(x) + nf_2(x)}\psi(x) - ne^{mf_1(x)}\int_0^x e^{nf_2(y)}f_2'(y)\psi(y)dy$$

viene ricondotta alla risoluzione dell'equazione differenziale del primo ordine:

$$z' - z[mf_1'(x) + e^{mf_1(x) + nf_2(x)}] - e^{mf_1(x) + nf_2(x)}f(x) = 0, \qquad z(0) = 0 \tag{5}$$

la quale per $f_1(u) = f_2(u) = u$ si riduce alla (3) ».

3. Se si suppone nella (4)

$$f_i(x) = \log a_i(x) \qquad (i = 1, 2)$$

si ottiene colle posizioni precedenti il seguente risultato:

« L'equazione

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x a_1^m(x)a_2^n(y)\varphi(y)dy \tag{6}$$

si può ricondurre alla risoluzione dell'equazione differenziale

$$(7) \qquad z' - z\left[\frac{ma_1'(x)}{a_1(x)} + a_1'''(x)a_2''(x)\right] - a_1'''(x)a_2''(x)f(x) = 0 \text{ ».}$$

Osserviamo che i nuclei iterati per la (6) nel caso che $a_1(x) = a_2(x) = a(x)$ sono dati da

$$k_r(x, y) = \begin{cases} k_1(x, y)\dfrac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!} & \text{se } \sigma = m + n = 0, \\ k_1(x, y)\dfrac{\{F(x) - F(y)\}^{r-1}}{(r-1)!} & \text{se } \sigma \neq 0[F'(u) = a^{\sigma}(u)]. \end{cases}$$

4. La dott.^{a} PINI in un suo lavoro [1] aveva ottenuto che: « L'equazione integrale

$$(8) \qquad f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)dy$$

colla posizione

$$z = \varphi(x) - f(x)$$

si riconduce all'equazione differenziale

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{z'}{\alpha'}\right)' - z = f(x), \qquad z(0) = z'(0) = 0 \text{ »,}$$

e quindi in molti casi integrabile immediatamente senza ricorrere ai metodi generali ed a complessi sviluppi in serie.

Vogliamo ora determinare alcuni casi in cui la (α) si sa integrare in termini finiti: « quelli in cui la funzione $a(x)$ soddisfa ad una delle seguenti condizioni:

$a)$ $2a'a''' - 3a''^2 - 4a'^3 = 4Ca'^2$;

$b)$ $a'' + 2Ca'\sqrt{a'} = 0$; $\qquad$ (C, n costanti)

$c)$ $\dfrac{2a''}{a'}\left(\dfrac{a''}{a'}\right)'' + 3\left(\dfrac{a''}{a'}\right)'^2 - 2\left(\dfrac{a''}{a'}\right)^2 \cdot \left\{2\left(\dfrac{a''}{a'}\right)' - a'\right\} - \dfrac{n^2}{a'^2}\left(\dfrac{a''}{a'}\right)^4 = 0$ ».

Per questo consideriamo l'equazione omogenea relativa alla (α):

$$(\alpha') \qquad a'z'' - a''z' - a'^2 z = 0$$

ed eseguiamo la sostituzione:

$$z = u \cdot \sqrt{a'}.$$

La (α') diventa

$$(\alpha'') \qquad u'' + u\,\frac{2a'a''' - 3a''^2 - 4a'^3}{4a'^2} = 0,$$

[1] « Bollettino Unione Matematica Italiana », n.i 2-3, 1931.

la quale nel caso che valga la (a) è un'equazione a coefficienti costanti.

Per il caso *b)* osserviamo che si può facilmente dimostrare che « condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione

$$Pz'' + Qz' + kz = 0$$

ove P e Q sono funzioni di x e k costante si possa ricondurre ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, è il sussistere della relazione

$$(b') \qquad Q = C\sqrt{P} + \frac{1}{2}P' \qquad (C \text{ costante}) \text{ »}$$

e la (b') nel caso della (α') diventa la (6).

Infine si tenga presente che nel caso *c)* si può determinare un integrale particolare di data forma, giacchè, come dimostreremo in un prossimo lavoro, vale il seguente risultato: « perchè l'equazione differenziale

$$z'' + f_1 z' + f_2 = 0$$

abbia un integrale particolare d'una certa forma è sufficiente che sussista la relazione

$$(c') \quad 2f_1^2\left(2f_2 - \frac{df_1}{dx}\right) + 3\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 - 2f_1\frac{d^2f_1}{dt^2} + n^2 f_1^4 e^{2\int f_1 dx} = 0 \text{ [1]} \quad (n \text{ cost.}) \text{ »}$$

e la (c') nel caso della (α') si riduce alla (c).

[1] Precisamente dimostreremo che: « L'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{df^2} + f_1\frac{dx}{dt} + f_2 x = 0$$

nel caso che valga la (c') ha l'integrale particolare

$$x = e^{nu_1} + e^{nu_2}$$

ove u_1 ed u_2 sono radici dell'equazione

$$u^2 + \frac{u}{n}\log(f_1 z) + \left\{\frac{\log(f_1 z)}{2n}\right\}^2 - \frac{z}{4} = 0 \qquad \left(z = e^{2\int f_1 dt}\right) \text{ ».}$$

Per esempio, l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - x\frac{1 + n^2t^2}{4t^2} = 0$$

i cui coefficienti soddisfano alla (c') ammette l'integrale particolare

$$x = \frac{e^{\frac{nt}{2}} + e^{-\frac{nt}{2}}}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}}\cosh\frac{nt}{2}.$$