
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * F. Enriques: Lezioni sulla teoria delle superfici algebriche
- * B. Wavre: Figures planétaires et géodésie
- * Lucien Gódeaux: La Géométrie
- * Eugène Blanc: Problèmes et compléments de Mécanique

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.5, p. 291–302.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_291_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_291_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_291_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

RECENSIONI

F. ENRIQUES: *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. (Raccolte dal dott. L. CAMPEDELLI), Parte prima, Pagine 483+IV (litogr., L. 68). Padova, Cedam, 1932.

In questo volume sono state raccolte le Lezioni tenute dal F. ENRIQUES all'Università di Roma nel 1930-31, intorno alla *geometria su di una superficie algebrica*. Di questo importantissimo ordine di ricerche, verso il quale — come già ho rilevato altrove — pare vada oggidì rinnovandosi l'attenzione degli studiosi, mancava finora una esposizione d'insieme, ove si eccettuino gli articoli delle enciclopedie, per loro natura relativamente schematici. Dobbiamo perciò essere sommamente grati all'ENRIQUES per la sua fatica, che — anche a voler prescindere dai perfezionamenti che apporta alla materia, dei quali diremo in seguito con maggiori dettagli — vien indubbiamente a rendere assai più agevole la via, a chi si vuol iniziare a quegli studi.

Il libro comprende una Introduzione e cinque Capitoli. L'INTRODUZIONE tratta rapidamente delle *generalità* sulle *trasformazioni birazionali* e del loro effetto sulle singolarità delle superficie algebriche, rendendo plausibile il *teorema sullo scioglimento delle singolarità*, per la cui dimostrazione rimanda ai lavori di B. LEVI, CHISINI ed ALBANESE; introduce quindi le nozioni di *singolarità normali* e di *curve eccezionali* di una superficie algebrica, nonché di *classe* cui questa appartiene.

Il CAPITOLO I stabilisce le prime proposizioni sui *sistemi lineari di curve* su di una superficie, e precisamente: la loro *proprietà caratteristica*; l'estensione dei teoremi di BERTINI, relativi ai *punti multipli* delle curve di un sistema lineare ed ai sistemi *riducibili*; le nozioni di *curve equivalenti*, di sistemi lineari *completi* o no e delle loro *imagini proiettive*; le *generalità sulla somma e differenza* dei sistemi lineari, col *teorema del resto*; e, da ultimo, definisce i *caratteri virtuali* di un sistema lineare e anche la sua *serie caratteristica virtuale* (secondo SEVERI). L'esposizione, salvo questo

ultimo punto, segue le fondamentali *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (Mem. Torino, 1893) e l'*Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (Mem. dei XL, 1896) dello stesso ENRIQUES, con qualche precisazione e semplificazione ulteriore.

Nei tre capitoli successivi viene svolta la teoria generale degli *invarianti* di una superficie, quale già sostanzialmente si trova nella citata *Introduzione*, adottando sempre le vedute semplificatrici che l'A. aveva utilizzato per le curve (nelle Lezioni da lui svolte in Bologna) nel 1899 e poscia esteso alle superficie in una Nota degli « Atti di Torino » del 1901.

Seguendo l'indirizzo di quest'ultima Nota, il CAPITOLO II introduce il *sistema canonico* ed i *pluricanonici* (coi loro caratteri: *genere geometrico*, *genere lineare* ed i *plurigeneri*), attraverso la considerazione del *sistema jacobiano*; il quale permette altresì — fra i vari sistemi *covarianti* di un dato sistema lineare — di definire il relativo *sistema aggiunto*. Vien data inoltre: la distinzione fra *invarianti assoluti* e *relativi*; un cenno di un'altra semplice *definizione* di sistema aggiunto, che deve al SEVERI (1906); ed infine la relazione fra *genere* e *grado* del sistema canonico, dedotta in tutta la sua generalità dal teorema relativo alla *serie lineare* (canonica) segata su di una curva dal sistema aggiunto.

Il CAPITOLO III è dedicato alla teoria delle *superficie aggiunte* ad una data superficie di S_3 , ed alla *caratterizzazione del sistema aggiunto* mediante la proprietà espressa dal suddetto teorema. Stabilita la *completezza* del sistema lineare segato su di una superficie a singolarità normali da tutte le aggiunte di dato ordine, e la nuova dimostrazione che ne discende pel teorema del resto secondo BRILL e NOETHER, segue la *costruzione* del sistema aggiunto a quello delle sezioni piane e del sistema canonico, nonchè la considerazione delle curve canoniche *pure* ed *impure* e di alcuni esempi.

Poggiando sul teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, viene intanto acquisita la *caratterizzazione dell'aggiunto* di un dato sistema lineare mediante la serie da esso segata sulla generica curva di questo, sotto convenienti *ipotesi semplici*; per poter passare al caso generale, occorre lo studio del comportamento delle superficie aggiunte ad una data nei *punti multipli propri* di questa: il che vien fatto in vari casi notevoli ed anche per le *superficie biaggiunte*, con in più un'analisi minuta relativa alle *curve fondamentali* dei sistemi lineari, che offre caratteri di maggior chiarezza e di novità nei confronti delle precedenti esposizioni. L'accennata *caratterizzazione dell'aggiunto*, può anche ottenersi in base ad alcune pro-

posizioni generali, che sono state dimostrate dal SEVERI in varie occasioni, col nome di *criteri di equivalenza*: di ciò appunto tratta l'ultimo paragrafo di questo Capitolo.

Il CAPITOLO IV, assai più ampio dei precedenti, si occupa principalmente del *genere aritmetico* e del *teorema di RIEMANN-ROCH* per le superficie.

Il genere aritmetico viene dapprima introdotto per via numerica, al modo di NOETHER, mediante le *formule di postulazione*. La postulazione di una *curva semplice* (anche dotata di *punti multipli o riducibile*) è stabilita col noto procedimento di CASTELNUOVO, che quindi è esteso al caso delle *curve multiple*, nel modo recentemente sviluppato da L. CAMPEDELLI; e vi è pure il fondamentale *teorema di CASTELNUOVO* (secondo cui è completo il sistema lineare di curve segato su di un piano da ogni sistema lineare completo di superficie con dato gruppo base e di ordine sufficientemente elevato), che permette in ogni caso di assegnare la forma che deve avere la formula di postulazione, e quindi pure — in particolare — l'espressione del *genere aritmetico*.

Definita l'*irregolarità* di una superficie, come differenza fra il genere geometrico ed il genere aritmetico, si porgono esempi (che in parte risalgono a CAYLEY ed a CASTELNUOVO) di superficie irregolari; vien dimostrata la *formula di SEVERI*, che fornisce il genere aritmetico di una superficie che sia somma di altre due; ed infine è stabilito che l'*irregolarità* di una superficie F d'ordine n appartenente ad S_3 , uguaglia la *somma delle deficienze* dei sistemi segati su di un piano dalle superficie d'ordine $\geq n - 3$ aggiunte alla F . Segue la dimostrazione generale dell'*invarianza* del genere aritmetico, conseguita — come nella citata *Introduzione* dell'ENRIQUES — attraverso l'identificazione della irregolarità quale *massimo* della deficienza della serie segata sopra una curva di un sistema irriducibile dal relativo sistema aggiunto.

L'ultima proprietà, equivale in sostanza al *teorema di RIEMANN-ROCH* per gli aggiunti dei sistemi lineari irriducibili o, se si vuole, *per i sistemi abbastanza ampi* (più ampi del sistema canonico); e, sotto questa forma, permette di stabilire l'importante risultato a cui si era progressivamente andato avvicinando l'ENRIQUES nei lavori citati, e che è stato dimostrato in tutta la sua generalità da CASTELNUOVO ed ENRIQUES nel 1901, secondo il quale si possono *eliminare le curve eccezionali* dalle superficie per cui il genere ed i plurigeneri non sono tutti nulli (ossia, come poi risulta dal seguito, dalle superficie che non equivalgono a rigate). Da ultimo si dimostra la completa validità del *teorema di RIEMANN-*

ROCH per le superficie, non seguendo la dimostrazione originale del CASTELNUOVO — da cui forse non è ancor stato dedotto tutto ciò che si può trarre — ma quella più semplice e luminosa indicata dal SEVERI, che si fonda sul teorema dell' $Af + B\varphi$ di NOETHER, e mediante la quale il suddetto teorema si ottiene sotto le ipotesi più generali, per una curva anche riducibile ⁽¹⁾; ne consegue il notevole teorema sulla *deficienza della serie caratteristica*, il quale risulta così acquisito (come in SEVERI) con un processo che è in certa guisa l'inverso di quello ideato dal CASTELNUOVO, al quale esso è dovuto.

Il CAPITOLO V, che da sè solo occupa più che la terza parte del volume, è consacrato a varie questioni generali riguardanti la classificazione delle superficie regolari, e precisamente relative alle *superficie di genere 1*, alle *superficie canoniche*, ai *piani doppi* ed alle *superficie razionali*.

Dopo aver esposto il teorema secondo cui le superficie regolari con *curva canonica d'ordine zero*, possono venir caratterizzate dall'aver il bigenere $P = 1$ (colla dimostrazione originale dell'ENRIQUES, opportunamente precisata), viene stabilita l'esistenza di *infinite famiglie di superficie con tutti i generi uguali ad 1* (formanti un insieme numerabile e ciascuna dipendente da 19 moduli), senza ricorrere alle considerazioni trascendenti con cui ciò è stato per la prima volta assodato dall'ENRIQUES e — indipendentemente e contemporaneamente — dal SEVERI.

Si passa quindi allo studio dettagliato delle *superficie canoniche* dei primi ordini, con largo materiale di nuovi esempi e con sviluppi che illuminano il problema generale della *costruzione* di tali superficie. Seguono la segnalazione dei legami di questo problema colla *geometria della varietà a tre o più dimensioni* (che, al di là delle semplici estensioni qui indicate, ha ricevuto contributi fondamentali dal SEVERI), ed alcune questioni concernenti le superficie col *sistema canonico riducibile o non semplice* ⁽²⁾.

Vi è poi uno sviluppo sistematico di *proprietà generali dei piani doppi*, in parte solo accennate nelle Memorie (di CLEBSCH, NOETHER, ENRIQUES, DE FRANCHIS, ecc.) a cui si attinge, ed una

⁽¹⁾ Il teorema vale altresì per una curva virtuale: ved. F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*. « Atti di Torino », 1905.

⁽²⁾ Ho potuto recentemente rimuovere il dubbio quivi affacciato dall'A, circa l'*effettiva esistenza* di superficie di quest'ultima categoria, col genere geometrico > 3 , che non siano dei piani doppi.

nuova esauriente trattazione dei *piani doppi razionali*. Rileviamo, fra le prime proprietà, quelle relative: alla *rappresentazione dei sistemi lineari* (in particolare, del sistema *canonico* e dei *pluricanonici*), sul piano doppio; al comportamento di questo di fronte alle *trasformazioni cremoniane*; infine, ai piani doppi a cui — giusta un teorema di NOETHER-ENRIQUES — si riducono le superficie regolari di dato genere lineare (col sistema canonico irriducibile), aventi *genere geometrico massimo*.

La *classificazione dei piani doppi razionali*, che il NOETHER aveva effettuata con qualche oscurità ed incertezza, è qui ottenuta in modo nitido — con CASTELNUOVO ed ENRIQUES — riducendo a tre tipi i *piani doppi con tutti i plurigeneri nulli* (l'annullarsi dei plurigeneri dà subito delle condizioni per la curva di diramazione, che vengono abilmente sfruttate allo scopo), e dimostrando quindi direttamente la loro *rappresentabilità su di un piano semplice*. Ciò fornisce in pari tempo la riduzione a tre tipi, birazionalmente distinti, delle involuzioni piane I_2 del 2° ordine, che sono *razionali*; queste poi, sono *tutte* le I_2 , a norma di un noto teorema di CASTELNUOVO (che qui viene dimostrato nel seguito). E si ha così una nuova rigorosa dimostrazione del teorema di BERTINI, sulla *classificazione delle involuzioni piane del 2° ordine*.

Come applicazione della teoria dei piani doppi razionali, è dato il *teorema di NOETHER* sulla razionalità delle superficie con un fascio lineare di curve razionali. E da ultimo, fondandosi sugli sviluppi precedenti, vengono stabilite le *condizioni di CASTELNUOVO* ($p_a = P = 0$) per la razionalità di una superficie, ed il classico teorema sulla *razionalità delle involuzioni piane*, dello stesso CASTELNUOVO. Le dimostrazioni di questo A. sono qui completamente rifatte e notevolmente semplificate; in particolar modo va segnalata la semplificazione dovuta all'uso dei citati *criteri di equivalenza*, passando da una verifica « in piccolo » ad un'applicazione « in grande », in forza del principio della continuità algebrica.

Queste *Lezioni* si raccomandano particolarmente — oltre che per i pregi scientifici — per la loro chiarezza e per i numerosi *esempi* (qualcuno solo rapidamente accennato) i quali costituiscono per il Lettore un utile esercizio e possono sovente suggerirgli argomenti di ricerca; molto opportune sono pure le numerose *indicazioni bibliografiche*. La loro redazione, dovuta al CAMPEDELLI, è assai accurata; ed anche la veste litografica è nitidissima.

Il libro offre un quadro armonioso e sufficientemente completo, dei risultati a cui — sostanzialmente per opera dello stesso ENRIQUES e del CASTELNUOVO — era pervenuta la geometria su

di una superficie algebrica verso la fine del secolo scorso, esposti maestrevolmente, con qualche aggiunta e varie semplificazioni; ed è una felice circostanza ch'esso sia stato concepito da uno dei fondatori della teoria.

L'A. ha proseguito durante l'anno accademico 1931-32 le sue lezioni presso l'Università di Roma, trattando il problema della *classificazione delle superficie*, com'è stato svolto — principalmente da lui — dal 1904 al 1914, e facendo capo alla conclusione che le condizioni $P_4 = P_6 = 0$ caratterizzano le rigate e che le superficie di genere zero non rigate sono ellittiche ⁽¹⁾. Si tratta di ricerche importantissime, che — sia qui detto per inciso — rammarico di non aver messe in luce nella mia recente *Prolezione* ⁽²⁾, e che è da augurare vengano presto raccolte in un'esposizione d'assieme, altrettanto limpida come quella di cui stiamo discorrendo.

BENIAMINO SEGRE

Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete. Bd. I., Berlin. Springer, 1932.

Sotto questo titolo, la Redazione del « Zentralblatt für Mathematik » inizia la pubblicazione di monografie sopra argomenti di interesse attuale in vari campi della matematica pura o delle sue più dirette applicazioni. Queste monografie, ciascuna di 5 a 7 fogli di stampa, sono acquistabili separatamente, ma sono anche riunite in volumi che ne contengono cinque. È comparso per ora il primo volume, e diamo qui un cenno di alcuni dei lavori che esso racchiude.

La prima monografia, del prof. K. REIDEMEISTER, è intitolata: « *Knotentheorie* ». La teoria dei nodi ha la sua origine nel quesito, di carattere intuitivo, di riconoscere se due fili chiusi, di materia estendibile ma non penetrabile, si possano ridurre l'uno all'altro mediante deformazione continua. Il problema dei nodi può ridursi a forma matematica in diversi modi, accennati dall'A.: però, se come elementi si assumono curve soggette a sole condizioni di continuità, ci si trova in un campo troppo generale per potere prestarsi a considerazioni di carattere intuitivo. Per questo

⁽¹⁾ Una esposizione monografica recente di questi risultati trovasi in H. GERPERT, *Die Klassifikation der algebraischen Flächen*. « Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. », t. 41 (1931), p. 18.

⁽²⁾ B. SEGRE, *La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri*. *Annali di Matematica*, serie IV, t. XI (1932), p. 1.

motivo, l'A., a rappresentare i fili intuitivi, assume come elementi del suo studio poligoni ad un numero finito di lati rettilinei. Si penetra più profondamente nello studio dei possibili intrecci collegandoli con proprietà topologiche dello spazio euclideo a tre dimensioni e colla teoria dei gruppi, ed è ciò che l'A. pone in evidenza nel suo opuscolo, mediante una minuta e bene ordinata analisi, nei cui particolari non è però possibile di addentrarci in questo breve cenno. Ci basti dire che la teoria si fonda sulla nozione di nodo, intendendosi con questa parola la classe dei poligoni deducibili l'uno dall'altro mediante l'operazione che consiste nel sostituire ad un lato $P_p P_1$ di un poligono due nuovi lati $P_p P_{p+1}, P_{p+1} P_1$, facenti capo ad un nuovo punto P_{p+1} non appartenente al primitivo poligono, o mediante l'operazione inversa. Di queste classi sono studiati, in tre capitoli minutamente elaborati con un rigore che non era facile introdurre in simili questioni, le proiezioni coi relativi punti doppi e gli intrecci; vi vengono associate matrici che permettono di determinare gl'invarianti; vi si collega un gruppo la cui struttura dà luogo a notevoli considerazioni. Una apposita tavola, contenente 84 figure accuratamente disegnate, dà una visione dei possibili intrecci per il caso di tre, quattro... e fino a nove punti di incrocio.

È da notare come l'argomento, nonostante il suo carattere così particolare, abbia dato luogo a non pochi lavori, i quali vengono citati nella accurata bibliografia che chiude il volumetto. s. p.

Una monografia, del prof. J. O. STRUTT, dal titolo: « *Lamésche-Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik* », corredata da una estesa bibliografia, è un'ottima guida per chi voglia mettersi al corrente degli studi intorno alle equazioni differenziali che portano il nome di MATHIEU e LAMÉ e alle loro applicazioni, giacchè l'A. ha saputo coordinare in breve, con profonda conoscenza dell'argomento, una grande quantità di ricerche antiche e moderne sparse nei vari periodici scientifici.

Indicata nel Cap. I la genesi di coteste equazioni e i problemi della fisica-matematica che da esse dipendono, l'A. passa nel Cap. II e III allo studio delle funzioni di MATHIEU di prima e seconda specie (soluzioni periodiche e non periodiche) e al modo di calcolarle, prendendo le mosse della celebre equazione di HILL a coefficienti periodici, tanto importante nella meccanica celeste, e usufruendo delle ricerche fatte da HILL stesso, da POINCARÉ, da WHITTAKER, da INCE e da altri autori moderni.

All'equazione di LAMÉ e alle sue soluzioni (*Lamésche Potentialfunktionen* e *Lamésche Wellenfunktionen*) è dedicato il Cap. IV.

dove si studiano le proprietà di coteste funzioni sia sull'ellissoide di rotazione e su quello a tre assi e sia nello spazio, insieme al modo di calcolarle secondo il metodo di C. NIVEN e alla loro rappresentazione in taluni casi mediante serie di funzioni di BESSEL e di HANKEL.

Nel Cap. V sono accennate con qualche dettaglio le varie applicazioni ai problemi della fisica e della teoria: propagazione delle onde acustiche ed elettromagnetiche in corpi e mezzi di varia natura e qualche problema di meccanica ondulatoria. p. b.

Un altro opuscolo, del prof. K. HOHENEMSER, tratta un argomento oggi di grande importanza per le applicazioni della matematica alla tecnica: « *i metodi di risoluzione approssimata dei problemi di autovalori nella elastocinetica* ». Tale importanza pone opportunamente in evidenza l'A. nella introduzione, dove egli osserva che la pratica delle grandi velocità rende necessario il calcolo delle vibrazioni dei sistemi elastici in moto per le previsioni relative alla loro stabilità. Si può dire una felice coincidenza che, mentre la pratica ingegneristica si avviava verso queste necessità, i moderni sviluppi delle teorie analitiche, teoria di STURM-LIOUVILLE delle equazioni differenziali, equazioni integrali, calcolo delle variazioni, metodo delle infinite variabili, abbiano portato l'interesse teorico sullo stesso terreno. Tuttavia, dal punto di vista pratico del calcolo molti desiderata sono ancora da raggiungere, perchè i numerosi metodi di approssimazione sono tutti laboriosi e molto limitatamente appoggiati da regole per la valutazione dell'errore. Nel volumetto che esaminiamo, la prima metà circa è destinata alla esposizione degli accennati principi teorici, mentre la seconda metà contiene l'applicazione dei detti metodi generali ad alcune delle equazioni più importanti, principalmente per i sistemi elastici ad un solo grado di libertà (vibrazione per torsione di un'asta, vibrazioni trasversali di un'asta o di una placca, vibrazioni delle travature). Il confronto dei risultati numerici dei vari metodi fra loro e colla soluzione in termini finiti (dove è possibile) permettono di formarsi un'idea dell'approssimazione che, almeno in qualche caso particolare, si può raggiungere. Tale il programma, indubbiamente interessante, della monografia: nella cui effettiva esecuzione è da rammaricare che i limiti di spazio abbiano costretto la prima parte ad essere poco più che un « rapporto » (senza quegli sviluppi e dimostrazioni che permettano il vero possesso dell'argomento) e la seconda ad accenni di calcolo anche essi spesso troppo sommari. Un compenso a tali difetti inevitabili è fornito dalla copiosa bibliografia

raccolta nelle note a piè di pagina la quale informa su numerosi e recenti studi particolari per parte di tecnici teorici ed apparsi in periodici di indirizzo tecnico, il che riuscirà particolarmente interessante anche per il matematico puro.

Una monografia sulle « *funzioni quasi-periodiche* » ad opera di H. BOHR sembra avere caratteristiche opposte alla precedente: l'argomento, puramente matematico, era più facile a circoscriversi; e l'A. — nelle parole introduttorie — accenna ad aver preferito di rinunciare alla esposizione di qualche argomento meno essenziale piuttosto che non riuscire completamente chiaro in quella delle teorie scelte come fondamentali. L'argomento è stato notoriamente portato davanti all'interesse dei matematici mediante tre Memorie fondamentali pubblicate dal BOHR medesimo negli « *Acta Mathematica* », vol. 45-46-47, 1925-26, cui seguirono tosto generalizzazioni e perfezionamenti per parte di vari Autori: nel campo delle variabili reali esso si avvicina alla teoria delle serie di FOURIER, in quello delle variabili complesse alla teoria delle serie di DIRICHLET. Nella presente redazione l'A. (riproducendo in sostanza un corso di lezioni e conferenze tenute nelle Università americane di Stanford, Berkeley, Princeton) utilizza questi vari contributi, e principalmente quelli del DE LA VALLÉE POUSSIN (1928) e quelli del BESICOVITCH (1931-32) per rendere più agile la stessa sua trattazione iniziale. Per avviare il lettore nell'argomento egli fa precedere una esposizione dei principali fatti relativi alle funzioni semplicemente periodiche, la quale, informandosi agli stessi principii della teoria più generale che seguirà, presenta per qualche parte anche interesse per se medesima. Un cenno, molto breve, ma di somma chiarezza intorno alle « *generalizzazioni* » della primitiva nozione di quasi periodicità costituisce una delle appendici del volumetto. Chiude la bibliografia, la quale, tenuto conto della specialità e della corta età dell'argomento è già abbastanza ampia.

Citiamo infine la « *Cinematica e la Cinetostatica grafiche* » del prof. K. FEDERHOFER di Graz, e di cui si dirà in altra occasione.
b. l.

R. WAVRE: *Figures planétaires et géodésie* (avec Préface de M. J. HADAMARD). Gauthier-Villars, 1932.

Questo libro di 190 pagine forma il fasc. XII dei *Cahiers Scientifiques* che Gauthier-Villars sta pubblicando sotto la direzione di G. JULIA. Non è un compendio di tutte le ricerche fatte da NEWTON

in poi riguardo all'equilibrio delle masse fluide rotanti, ma piuttosto un'esposizione, talvolta sommaria, delle ricerche più moderne. L'Autore stesso dichiara nell'introduzione: « c'est un exposé d'ensemble de mes recherches personnelles. Celles ci sont parties des instruments mathématiques que l'on utilise habituellement depuis LAPLACE dans ce genre de recherches. Mais la mise en œuvre des ces instruments est, je crois, très différente de ce qu'on a fait jusqu'à maintenant ».

Egli ha cercato anzitutto, in vista delle applicazioni alle masse astrali e planetarie, di allargare il campo classico della ricerca onde accostarsi maggiormente alla realtà. La massa fluida rotante rigidamente è un caso troppo ideale; il Sole, ad esempio, non si trova in cotesta condizione.

A ciò sono dedicati i primi tre capitoli, in cui si trova tra l'altro una estensione del celebre teorema di STOCKES: il potenziale Newtoniano all'esterno dell'astro dipende soltanto dalla massa, dalla superficie libera, e dalla velocità angolare (che l'A. suppone variabile con la distanza dei punti dall'asse di rotazione); poi l'analoga estensione del nuovo teorema dovuto a LICHENSTEIN, di grande importanza: una massa fluida rotante, le cui particelle si attirano con la legge di NEWTON, assume una forma d'equilibrio avente un piano di simmetria perpendicolare a l'asse di rotazione. E infine sono anche notevoli alcune deduzioni e perfezionamenti dei risultati classici di CLAIRAUT e D'ALEMBERT.

Il Capitolo IV contiene la parte più originale e importante delle ricerche dell'Autore. È noto quanto sia fondamentale nello studio dei potenziali newtoniani e delle loro applicazioni lo sviluppo in serie di $1/r$ (l'inversa della distanza di due punti P e P_1) per le potenze di OP_1/OP , dove figurano come coefficienti i polinomi di LEGENDRE.

Orbene, per riguardo alla convergenza, bisogna considerare due sviluppi, secondochè il punto potenziale P_1 si trova a maggiore o minore distanza di P dall'origine. Da ciò nascono gravi difficoltà teoriche e pratiche.

Il prof. WAVRE è riuscito a trasformare l'equazione fondamentale in guisa che basta un solo sviluppo per ottenere in forma esplicita tutte le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Con queste Egli ha potuto non solo far varie deduzioni e pervenire con procedimento unico, che chiama *procédé uniforme*, ai risultati classici di MACLAURIN, JACOBI e POINCARÉ; ma ampliare anche più le antiche ricerche, spingendo avanti le approssimazioni fino a tener conto dei termini dipendenti dalla quarta potenza della velocità angolare. Con questo mezzo Egli prova, in altri ca-

pitoli del libro, che certe discordanze fra teoria e osservazioni o spariscono o vengono attenuate.

Il contributo dunque portato dall'Autore in questa materia è assai pregevole; ond'è da rallegrarsi ch'Egli l'abbia esposto in un libro alla portata di tutti gli studiosi. Esso potrà ispirare ricerche nuove.

p. b.

LUCIEN GODEAUX: *La Géométrie*. Pagg. 181, Liège, Georges Thone (1931).

Questo libro, che fa parte di una collezione scientifica Belga (Bibliothèque scientifique Belge), non ha la pretesa di essere un trattato di geometria, ma si propone il fine di dare agli studiosi una rapida visione dello svilupparsi dei concetti della geometria moderna. Tale compito è dall'A. assolto con competenza, chiarezza ed eleganza.

Il volume si divide in cinque capitoli, nel primo dei quali sono riassunte definizioni e proprietà geometriche principali, specie in relazione con la teoria dei gruppi.

I successivi capitoli secondo e terzo, trattano rispettivamente della geometria proiettiva e di quella non euclidea.

In queste prime tre parti per le quali basta la cultura geometrica del primo biennio universitario, è fondamentale il contributo portato da F. KLEIN, in ispecie col celebre Programma di ERLANGEN. Il quarto capitolo è dedicato alla geometria algebrica e si svolge con una chiara esposizione delle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio e dei sistemi lineari di curve piane.

L'ultimo capitolo tratta poi della geometria su una curva algebrica e sopra una superficie algebrica.

Queste due ultime parti del volume sono particolarmente utili per gli studenti di matematica, richiedendo un fondamento geometrico un po' più esteso, ed in esse è ben messo in evidenza dall'A., il quale ha frequentato per non poco tempo la nostra Università di Bologna, il grande contributo apportato alla geometria algebrica dalla scuola italiana.

Il volume, che non porta citazioni bibliografiche di memorie e note, ma che contiene un esteso elenco di trattati di geometria, può assai utilmente servire a chi voglia accingersi allo studio di queste opere.

e. m.

EUGENE BLANC: *Problèmes et compléments de Mécanique*. Pag. XV+287, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

Gli studenti del 1° biennio universitario che debbono sostenere una prova-scritta trattando questioni di meccanica, si trovano

non di rado imbarazzati, come si ha spesso occasione di constatare, nella scelta dei principi da applicare e rimangono talvolta anche assai impacciati nell'uso dello strumento analitico relativo.

L'esercizio intenso nella risoluzione di problemi di meccanica seguendo la guida di qualche Corso, in cui le questioni siano scelte con criterio per quanto riguarda gli argomenti fisici, e siano trattate col mezzo analitico che più loro si confaccia per semplicità ed eleganza, riesce efficacemente a spianare le difficoltà della prova d'esame.

Ma quest'esercizio dovrebbe dai giovani essere considerato in un senso assai più largo e servirsene per raggiungere quella formazione mentale indispensabile per chi vuole iniziarsi agli alti studi della Fisica e dell'Ingegneria.

Il libro in esame si presenta tale da corrispondere egregiamente a questo fine educativo, ragione per cui riteniamo che esso possa venire consigliato come guida per i giovani studiosi.

Esso tratta questioni di Cinematica del punto e dei sistemi, questioni di statica e dinamica del punto (non dei sistemi, per i quali è promesso un 2° volume), richiamando con molta chiarezza i concetti principali della teoria e sviluppando con esaurienti discussioni molti problemi assai interessanti, compresi i più classici, per i quali non mancano consigli opportuni suggeriti dall'esperienza didattica dell'A.

Figurano ancora gli enunciati, con tracce estese di risoluzione, di tutti i problemi proposti dal 1919 al 1930 a Parigi nelle prove che debbono sostenere i candidati al cosiddetto « certificat de mathématiques générales ».

Il libro ha meritato una autorevole e lusinghiera presentazione del prof. E. LE ROY, Membre de l'Istitut. m. m.