Bruno Tedeschi

Calcolo della funzione generatrice di alcune somme di valori di $\binom{n}{k}$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.1, p. 22–25.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_22_0>

Calcolo della funzione generatrice di alcune somme di valori $\binom{n}{k}$.

Nota di BRUNO TEDESCHI (a Trieste).

Sunto. - *L'A. calcola le funzioni generatrici di due somme di valori* $\binom{n}{k}$ *e di una delle due dimostra che può prendere solamente i valori* 1, —1, 0.

Ci proponiamo di calcolare le funzioni generatrici delle due seguenti somme

(1) $$u_{r,n} = \sum_{h=0} \binom{n}{hq+r} \text{ (1)}; \quad 0 \leq q < n; \quad 0 \leq r < q,$$

(2) $$u_n = \sum_{h=0} (-1)^h \binom{n+1-h}{h},$$

che non compaiono nel formulario del sottocitato libro del NETTO.

§ I. — **1.** Le $u_{r,n}$ soddisfano alla relazione

(3) $$\sum_{\alpha=0} (-1)^\alpha \binom{q}{\alpha} u_{r,n+q-\alpha} - u_{r,n} = 0.$$

Difatti è

$$\sum_{\alpha=0} (-1)^\alpha \binom{q}{\alpha} u_{r,n+q-\alpha} = \sum_{\alpha=0} (-1)^\alpha \binom{q}{\alpha} \sum_{\beta=0} \binom{n+q-\alpha}{\beta q+r} =$$

$$= \sum_{\beta=0} \sum_{\alpha=0} (-1)^\alpha \binom{q}{\alpha} \binom{n+q-\alpha}{\beta q+r},$$

ed essendo

$$\sum_{\alpha=0} (-1)^\alpha \binom{q}{\alpha} \binom{n+q-\alpha}{\beta q+r} = \binom{n}{(\beta-1)q+r} \text{ (2)}$$

(1) Quando in una sommatoria manca l'indicazione del limite superiore per la lettera rispetto alla quale si somma, si intende che la somma sia estesa fino al primo termine che si annulla. Vedi NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Teubner 1927, osservazione alla formula (19), pag. 250.

(2) Vedi NETTO, formula (27) pag. 252, nella quale si fa

$$q=k, \quad \alpha=s, \quad n+q=p, \quad \beta p+r=m; \quad \sum_{s=0} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{p-s}{m} = \binom{p-k}{p-m}.$$

si ha

$$\sum_{\alpha=0} (-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha} u_{r,\,n+q-\alpha} = \sum_{\beta=0}\binom{n}{(\beta-1)q+r} = \sum_{\beta=0}\binom{n}{\beta q+r} = u_{r,\,n}.$$

Inoltre è

$$u_{r,\,n} = \binom{n}{r} \quad \text{se} \quad n < q, \tag{4}$$

perchè la (1) si limita al primo addendo.

2. Poniamo la funzione generatrice

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} u_{r,\,h}\cdot x^h. \tag{5}$$

Si ha identicamente [1]

$$\begin{aligned}
\varphi(x)\cdot\left\{(1-x)^q - x^q\right\} &= \varphi(x)\cdot\left[\sum_{\alpha=0}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}x^{\alpha} - x^q\right] = \\
&= \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}u_{r,\,h}x^{\alpha+h} - \sum_{h=0}^{\infty}u_{r,\,h}x^{q+h} = \\
&= \sum_{h=-q}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{h+q}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}u_{r,\,h+q-\alpha}x^{q+h} - \sum_{h=0}^{\infty}u_{r,\,h}x^{q+h} = \\
&= \sum_{h=-q}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{h+q}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}u_{r,\,h+q-\alpha}\cdot x^{q+h} = \\
&= \sum_{h=0}^{q-1}\sum_{\alpha=0}^{h}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}u_{r,\,h-\alpha}\cdot x^{h} = \\
&= \sum_{h=0}^{q-1}\sum_{\alpha=0}^{h}(-1)^{\alpha}\binom{q}{\alpha}\binom{h-\alpha}{r}\cdot x^{h} = \sum_{h=0}^{q-1}\binom{h-q}{h-r}x^h = \\
&= \sum_{h=r}^{q-1}(-1)^{h-r}\binom{q-r-1}{h-r}x^h = \sum_{h=0}^{q-r-1}(-1)^{h}\binom{q-r-1}{h}x^{h+r}
\end{aligned}$$

da cui

$$\varphi(x) = \frac{\displaystyle\sum_{h=0}^{q-r-1}(-1)^h\binom{q-r-1}{h}\cdot x^{h+r}}{(1-x)^q - x^q} = \frac{x^r(1-x)^{q-r-1}}{(1-x)^q - x^q}. \tag{6}$$

(1) Alterando opportunamente gli indici ed usando la (4), la nota precedente e la $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$. (Vedi NETTO, pag. 246).

Il coefficiente di x^n nello sviluppo in serie di $\varphi(x)$, è il valore di (1).

§ II. — **3.** I primi valori di u_n sono

$$u_0 = 1 ; \quad u_1 = \binom{2}{0} - \binom{1}{1} = 0 ; \quad u_2 = \binom{3}{0} - \binom{2}{1} = -1 ; \quad \ldots\ldots \tag{7}$$

Le (2) soddisfano alla seguente relazione:

$$u_n - u_{n-1} = u_{n+1}. \tag{8}$$

Difatti

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n+1-k}{k} - \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{k} =$$

$$= 1 - \left\{ \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{k} \right\} =$$

$$= 1 - \left\{ \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{k+1} + \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{k} \right\} =$$

$$= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=0} (-1)^{k+1} \binom{n-k+1}{k+1} = \binom{n+2}{0} +$$

$$+ \sum_{k=1} (-1)^k \binom{n+2-k}{k} =$$

$$= \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n+2-k}{k} = u_{n+1}.$$

La (8) si scrive anche, cambiando n in $n-1$, nella forma

$$u_n - u_{n-1} + u_{n-2} = 0. \tag{8'}$$

4. Poniamo la funzione generatrice

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} u_h \cdot x^h. \tag{9}$$

È [1]

$$f(x) - x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} u_h \cdot x^h - \sum_{h=0}^{\infty} u_h x^{h+1} + \sum_{h=0}^{\infty} u_h \cdot x^{h+2} =$$

$$= u_0 + (u_1 - u_0)x + \sum_{h=2}^{\infty} u_h x^h - \sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{h+1} + \sum_{h=0}^{\infty} u_h \cdot x^{h+2} =$$

$$= u_0 + (u_1 - u_0)x + \sum_{h=2}^{\infty} (u_h - u_{h-1} + u_{h-2}) \cdot x^h =$$

$$= u_0 + (u_1 - u_0)x = 1 - x.$$

[1] Ricordando la (9), la (8') e le (7).

Da cui

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^3} = (1-x^2)(1-x^3+x^6-x^9+\ldots)$$

ossia

$$f(x) = 1 - x^2 - x^3 + x^5 + x^6 - x^8 - x^9 + x^{11} - \ldots . \tag{10}$$

Dal confronto della (9) con la (10) si ricava per qualunque intero $l \geq 0$

$$u_{6l} = u_{6l+5} = 1 ; \quad u_{6l+1} = u_{6l+4} = 0 ; \quad u_{6l+2} = u_{6l+3} = -1.$$