Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Laboccetta

Ancora sulla definizione delle funzioni nei punti corrispondenti a certi limiti singolari di esse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.4, p. 232–237.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_232_0>

Ancora sulla definizione delle funzioni nei punti corrispondenti a certi limiti singolari di esse.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *Proseguendo un precedente studio si mostra come, eliminando l'indeterminazione, si possano trasformare le funzioni e le equazioni che rappresentano successioni di valori e di linee, in modo da comprendere effettivamente in queste il limite corrispondente ad un valore che la variabile, o il parametro, non raggiungono; si considera il caso dell'eliminazione dei valori isolati nei tagli e nei salti indicando le applicazioni fisiche.*

In un precedente scritto [1] ho indicato i modi di render definite le funzioni in corrispondenza di quei punti nei quali divengono indeterminate perchè assumono una delle forme $1/0$, $0/0$, $0 \times \infty$, 0^0 o perchè in prossimità di essi oscillano tendendo a coprire un segmento, un'area, un volume. Estendo ora i detti procedimenti al caso delle funzioni che tendono ad un limite che effettivamente non raggiungono perchè la variabile non prende il valore al quale esso corrisponde, ed al caso delle equazioni rappresentanti una curva che si deforma al variare di un parametro tendendo a confondersi con un segmento per un valore del

[1] « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Ottobre 1932.

parametro per il quale l'equazione diventa indeterminata. Esamino pure il caso di una funzione di due variabili che diventa indeterminata in un punto nel quale tende a limiti diversi che coprono un intero segmento; considero infine il caso di una funzione con una discontinuità, taglio o salto con punto isolato, in corrispondenza della quale prende un valore diverso da quello cui tende dall'uno, dall'altro o da entrambi i lati di essa.

1. Funzione che non assume il valore del limite. — Si considerino le due successioni

$$(1) \qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots, \qquad r^1,\ r^2,\ r^3,\ldots,\ r^n,\ldots, \qquad (r<1)$$

e le due corrispondenti funzioni di variabile continua che le rappresentano

$$(2) \qquad (I\nu)^{-1}, \qquad r^{I\nu} \qquad (r<1).$$

Esse tendono a zero per $\nu \to \infty$, ma lo zero non è un valore effettivamente assunto da nessuna delle due funzioni perchè nè la variabile continua ν, nè quella intera n, raggiungono mai il valore ∞. Se però si pone $\nu = 1/\varepsilon$ e si tiene presente che la funzione

$$(3) \qquad \psi(\varepsilon) = I\frac{1}{\varepsilon + \mathrm{Punt}\,\varepsilon}$$

per ε variabile da 1 a 0 prende successivamente tutti i valori inlori 1, 2, 3,... e per $\varepsilon = 0$ diventa $=1$, si scorge che le due espressioni

$$(4) \qquad \mathrm{sgn}^2\varepsilon\,\{\psi(\varepsilon)\}^{-1}, \qquad \mathrm{sgn}^2\varepsilon\, r^{\psi(\varepsilon)}$$

prendono tutti i valori delle successioni (1) ed inoltre sono 0 per $\varepsilon = 0$.

Il limite, che non viene raggiunto, può anche essere diverso da zero, come nel caso della successione (e della corrispondente funzione)

$$(5) \qquad 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ldots,\ \frac{n-1}{n},\ldots, \qquad 1-(I\nu)^{-1}$$

che, sempre per mezzo della funzione (3), può essere ridotta alla forma

$$(6) \qquad 1-\mathrm{sgn}^2\varepsilon\,\{\psi(\varepsilon)\}^{-1}$$

nella quale, per ε variabile da 1 verso 0, prende appunto tutti i valori $\dfrac{n-1}{n} = 1-\dfrac{1}{n}$ e per $\varepsilon = 0$ diventa $=1$.

2. **Curva che degenera in un segmento rettilineo.** — Invece di una successione di valori di una funzione, si può avere una serie di curve, come ad esempio la famiglia di ellissi rappresentate dalla equazione

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1 \tag{7}$$

che al variare del parametro si vanno schiacciando contro l'asse delle y per $\alpha \to n\pi$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ tendendo al segmento $\mathrm{Dir}(y; 1) = 1$, cioè $-1 \leq y \leq 1$, e si vanno schiacciando contro l'asse delle x, per $\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ tendendo al segmento $\mathrm{Dir}(x; 1) = 1$, cioè $-1 \leq x \leq 1$, senza giungere a coincidere effettivamente nè con l'uno nè con l'altro segmento, perchè essi corrispondono a valori di α pei quali la (7) diventa indeterminata. Si rende determinata per questi valori, aggregandoli come estremi alla successione, scrivendo la (7)

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \mathrm{Punt} \operatorname{sen} \alpha} + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha + \mathrm{Punt} \cos \alpha} = \tag{8}$$

$$= 1 - \mathrm{Cm} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \operatorname{sgn}^2 \operatorname{sen} \alpha - \mathrm{Cm} \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} \operatorname{sgn}^2 \cos \alpha.$$

Di questa equazione si può dare un'interpretazione geometrica considerando le curve rappresentate dalla (7) come linee di livello di una superficie, dei punti della quale il parametro α sarebbe la terza ordinata, e le cui sezioni con un piano $z = \alpha$ passano periodicamente, al variare di α, dalla forma circolare a quella ellittica che degenera negli estremi di ogni periodo in due segmenti che si appoggiano all'asse delle z e sono paralleli uno all'asse delle x e l'altro all'asse delle y.

3. **Limite costituito da un segmento finito.** — Geometricamente si presenta questo caso nella rappresentazione delle superficie quando una retta ad esse appartenenti risulta perpendicolare al piano delle x, y coincidendo per es. con l'asse delle z. In tal caso la funzione diventa indeterminata se sono contemporaneamente nulle entrambe le variabili $(x = 0 = y)$. È classico l'esempio della funzione [1]

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \tag{9}$$

[1] V. ad es. l'Es. 20, p. 33 di E. PASCAL. *Esercizi e Note critiche di Calcolo Infinitesimale.* Milano, 1895.

nella di cui espressione ponendo $y = kx$ si ottiene

(10) $$z = 2k/(1 + k^2).$$

Si scorge quindi che z può prendere qualsiasi valore del segmento $\mathrm{Dir}(z; 1) = 1$, cioè $-1 \leq z \leq 1$, se il punto definente le due variabili tende all'origine secondo una retta uscente da essa. Si leva l'anomalia di questa indeterminazione trasformando la (9) in modo che per $x = 0 = y$ il denominatore prenda il valore 1 e il numeratore il valore segmentale $\mathrm{Dir}^{-1}(1 : 1)$ scrivendo cioè

(11) $$z = \frac{2xy + \mathrm{Dir}^{-1}(1; 1)\,\mathrm{Punt}(x, y)}{x^2 + y^2 + \mathrm{Punt}(x, y)}$$

dove $\mathrm{Punt}(x, y)$ è la funzione puntiforme del piano [1] che prende il valore 1 nel punto $x = 0 = y$ ed è nulla negli altri punti.

4. **Limite in corrispondenza di un taglio.** — Quando si ha una discontinuità costituita da un taglio, al quale corrisponde un punto isolato, la variabile prende il valore al quale corrisponde il limite, ma il valore della funzione per esso è diverso dal limite al quale tende dall'uno e dall'altro lato. È di questo tipo la funzione

(12) $$(\Delta_0 + a\rho^2) I \frac{2r^2}{r^2 + \rho^2}$$

che per $0 < \rho^2 \leq r^2$ ha sempre il valore $\Delta_0 + a\rho^2$ e quindi si può dire che, per $\rho \to 0$, tende a Δ_0, ma per $\rho = 0$ il suo valore è $2\Delta_0$.

La correzione di anomalie di questa specie, che è di fondamentale importanza per la effettiva integrazione delle funzioni discontinue, si esegue, come ho già indicato [2] con l'aggiunta di una funzione puntiforme di valore uguale e contrario a quello della differenza fra il valore che la funzione prende al limite ed il limite della funzione.

Nel presente caso si dovrebbe porre

(13) $$(\Delta_0 + a\rho^2) I \frac{2r^2}{r^2 + \rho^2} - \Delta_0 \,\mathrm{Punt}\,\rho$$

ma è possibile, in questo caso particolare, ottenere lo stesso risul-

[1] La costruzione delle funzioni puntiformi è indicata nel precedente mio scritto, « Bollettino dell'U. M. I. », Dicembre 1929.

[2] In questo « Bollettino », Dicembre 1932.

tato in modo più semplice scrivendo (1)

$$(14) \qquad \Delta = (\Delta_0 + a\rho^2) I \frac{3r^2}{r^2 + \rho^2}.$$

Ed è chiaro poi che secondo che a ρ^2 si attribuisce il valore x^2, $x^2 + y^2$, oppure $x^2 + y^2 + z^2$, la (14) rappresenta il segmento $-r \leq x \leq r$, cioè $\mathrm{Dir}(x; 1) = 1$, l'area circolare o la sfera solida di raggio r, $\mathrm{Dir}\left(\frac{x}{r}; 1\right) = 1$ con densità variabile da Δ_0, per $\rho = 0$, a $\Delta_0 + a\rho^2$, per $\rho = r$.

5. **Limite in corrispondenza d'un salto.** — Supponiamo qui che si tratti di una superficie di discontinuità separante due regioni dello spazio in una delle quali la funzione data $f(x, y, z)$ coincide con una funzione $f_1(x, y, z)$ e nell'altra con una funzione $f_2(x, y, z)$, funzioni che dalle due parti della superficie di discontinuità tendono a limiti fra loro diversi e diversi dai valori $f_0(x, y, z)$ che la funzione $f(x, y, z)$ prende sulla superficie di discontinuità $\varphi(x, y, z) = 0$.

Presenta un salto del tipo indicato la funzione (2)

$$(15) \qquad f = \lim_{n \to \infty} \frac{f_1 + f_2 e^{n\varphi}}{1 + e^{n\varphi}}$$

che in corrispondenza della superficie di discontinuità tende al valore

$$(16) \qquad f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

valore però che essa effettivamente non assume perchè non diventa mai $n = \infty$.

Si tolgono i valori isolati $f = f_0$ corrispondenti alla superficie di discontinuità e si aggregano ai valori ai quali la funzione tende da una delle due parti, per es. dalla parte dove la funzione data f coincide con quella f_2, ottenendo così che essa effettivamente as-

(1) L'espressione qui data di $\mathrm{Dir}\left(\frac{x}{r}; 1\right)$ è un caso particolare di quella più generale che ho indicato nella rappresentazione della funzione $[f]_b^a$; v. « Bollettino dell'U. M. I. », Ottobre 1930.

(2) V. p. 7, vol. I di J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Second edition, 1881.

suma i valori ai quali tende [1] dando alla (15) la forma

$$(17)\qquad f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_1 \operatorname{sgn}^2 \varphi \operatorname{sgn}^2 \varepsilon + f_2 \exp\{\varphi\psi(\varepsilon)\} \operatorname{sem}\operatorname{sgn}(\varphi;1)}{\operatorname{sgn}^2 \varphi \operatorname{sgn}^2 \varepsilon + f_2 \exp\{\varphi\psi(\varepsilon)\} \operatorname{sem}\operatorname{sgn}(\varphi;1)}$$

e qui deve intendersi che ε varia da 1 a 0 prendendo effettivamente il valore zero.

Questa espressione però si semplifica, poichè per $\varepsilon = 0$ essa coincide dovunque con

$$(18)\qquad f = f_1 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{\operatorname{sem}\operatorname{sgn}(\varphi;1)}.$$

Funzioni di questo tipo permettono di esprimere con una formola unica leggi complesse, come per es.

$$(19)\qquad \Delta = \Delta_1 \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\operatorname{sem}\operatorname{sgn}(\rho - r;0)}$$

$$(20)\qquad f = \frac{4}{3}\pi\Delta_1 k\rho \left(\frac{r}{\rho}\right)^{3\operatorname{sem}\operatorname{sgn}(\rho - r;0)}$$

$$(21)\qquad \Delta V = -\,4\pi\Delta_1 I \frac{3r}{2r+\rho}$$

relative tutte ad una sfera omogenea di densità Δ_1, e raggio r immersa in un mezzo indefinito anch'esso di densità costante $= \Delta_2$ per la (19) e nulla per la (20) e la (21). Di queste equazioni la prima rappresenta la densità dei punti dello spazio, dentro e fuori della sfera; la seconda il valore dell'attrazione newtoniana su di un punto di massa uno alla distanza ρ dal centro della sfera tanto per $\rho > r$ quanto per $\rho < r$; la terza infine riunisce in una espressione unica le equazioni di LAPLACE e di POISSON valevoli l'una per l'esterno l'altra per l'interno della sfera. Le tre equazioni (19), (20), (21), ciascuna completa in se stessa, sostituiscono le tre coppie di equazioni incomplete

$$(22)\qquad \Delta = \Delta_1, \qquad \Delta = \Delta_2$$

$$(23)\qquad f = \frac{4}{3}\pi\Delta_1 k\rho, \qquad f = \frac{4}{3}\pi\Delta_1 k \frac{r^3}{\rho^2}$$

$$(24)\qquad \Delta V = 0, \qquad \Delta V = -\,4\pi\Delta_1$$

ognuna delle quali deve essere completata con l'indicazione dei limiti di validità che in nessuna appariscono.

[1] Credo che G. LIBRI sia stato il primo a proporsi ed a risolvere il problema di « obtenir (des) expressions dont la valeur soit toujours exacte aux limites ou qui même devienne égale à une quantité quelconque », v. p. 29 della raccolta « Mémoires mathématiques par Guillaume Libri », Berlin, 1835.