Bollettino Unione Matematica Italiana

Basilio Mania

Sull'approssimazione delle curve e degli integrali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 36–41.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_36_0>

Sull'approssimazione delle curve e degli integrali [1].

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione di un teorema del* TONELLI *relativo all'approssimazione di un integrale curvilineo in forma ordinaria* $\int\limits_C f(x, y, y')dx$.

Mi propongo di dimostrare un teorema del TONELLI [2] relativo all'approssimazione di un integrale $\int\limits_C f(x, y, y')dx$, calcolato sopra una curva

$$C_0: \qquad y = y_0(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

con $y_0(x)$ assolutamente continua nell'intervallo (a, b) mediante i valori dello stesso integrale calcolato sopra curve

$$C: \qquad y = y(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

di classe 1 aventi gli stessi punti terminali di C_0.

Non avendo conosciuto la dimostrazione del TONELLI, ne ho dato un'altra che mi pare possa presentare qualche interesse e che mi permetto di esporre in questa Nota.

1. Dimostreremo da prima il seguente

TEOREMA. — *La funzione* $f(x, y, y')$ *sia finita e continua per* (x, y) *appartenente a un campo piano limitato aperto* D, *e* y' *finito qualunque; sia*

$$C_0: \qquad y = y_0(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

una curva assolutamente continua del campo aperto D *per la quale*

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] L. TONELLI, *Sur une question du calcul des variations*, «Rec. Math.», Moscou, I, 33, 1926.

esista finito l'integrale

$$\int_{C_0} f(x,\ y_0(x),\ y_0'(x))dx\,;$$

fuori di C_0 *esista finita la derivata* $f_y(x, y, y')$.

Si possano determinare due numeri positivi σ *ed* M *tali che, se* $\delta(x)$ *è una qualunque funzione definita in* (a, b) *con* $0 < |\delta(x)| \leq \sigma$, *in ogni pseudointervallo* E *di* (a, b) *nel quale esista finito l'integrale*

$$\int_E f_y(x,\ y_0(x) + \delta(x),\ y_0'(x))dx$$

si abbia

$$\int_E |f_y(x,\ y_0(x) + \delta(x),\ y_0'(x))|\,dx \leq M.$$

Allora, assegnato ad arbitrio un numero $\eta > 0$, *si può determinare una funzione*

$$y = y(x) \qquad\qquad (a \leq x \leq b),$$

finita e continua insieme con la sua derivata prima e tale che:

1°) $y(a) = y_0(a),\ \ y(b) = y_0(b)$;

2°) $|y(x) - y_0(x)| < \eta$ *in tutto l'intervallo* (a, b);

3°) $\left|\int_a^b f(x,\ y(x),\ y'(x))dx - \int_a^b f(x,\ y_0(x),\ y_0'(x))dx\right| < \eta.$

Fissiamo un numero $R > 0$ abbastanza grande affinchè l'insieme E dei punti di (a, b) nei quali $y_0'(x)$ esiste finita con $|y_0'(x)| \leq R$ abbia misura positiva. Essendo n un numero intero qualunque $> R$ indichiamo con E_n l'insieme dei punti di (a, b) nei quali $|y_0'(x)| \leq n$.

Dopo ciò definiamo una funzione $y_n'(x;\alpha)$ ponendo, per ogni numero α, $y_n'(x;\alpha) = y_0'(x) + \alpha$ in E, $y_n'(x;\alpha) = y_0'(x)$ in $E_n - E$ e $y_n'(x;\alpha) = 0$ nell'insieme E_n' complementare di E_n rispetto ad (a, b).

Posto

$$y_n(x;\alpha) = y_0(a) + \int_a^x y_n'(x;\alpha)dx,$$

si ha

$$y_n(x;\alpha) - y_0(x) = \alpha(b-a)\vartheta_1(x) + \vartheta_2(x)\int_{E_n'} |y_0'|\,dx \tag{1}$$

essendo $\vartheta_1(x)$ un numero compreso fra 0 e 1 e $\vartheta_2(x)$ un numero compreso fra -1 e $+1$.

In particolare

$$(1^*)\qquad y_n(b;\alpha)-y_0(b)=\alpha m(E)+\vartheta_2(b)\int_{E_n'}|y_0'|\,dx,$$

e quindi se è $\alpha>0$ ed n è abbastanza grande affinchè sia

$$(2)\qquad \int_{E_n'}|y_0'|\,dx<\alpha m(E),$$

si ha

$$y_n(b;\alpha)-y_0(b)>0,\quad y_n(b;-\alpha)-y_0(b)<0,$$

ed esiste un numero $\bar{\alpha}$ compreso fra $-\alpha$ e α tale che

$$y_n(b;\bar{\alpha})=y_0(b).$$

Essendo $\alpha>0$ fissato, sia n il più piccolo intero positivo per il quale valga la (2), e tale che sia $n>\frac{1}{\alpha}$.

Allora abbiamo

$$(3)\qquad \left|\int_a^b f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),y_n'(x;\bar{\alpha}))dx-\int_a^b f(x,y_0(x),y_0'(x))dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b|f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),y_n'(x;\bar{\alpha}))-f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx\leq$$

$$\leq\int_E|f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),y_n'(x;\bar{\alpha}))-f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx+$$

$$+\int_{E_n-E}|f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),y_0'(x))-f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx+$$

$$+\int_{E_n'}|f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),0)|\,dx+\int_{E_n'}|f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx.$$

Al tendere di α a zero, il primo, il terzo e il quarto integrale dell'ultimo membro di questa disuguaglianza tendono a zero per la (1) e per il fatto che $m(E_n')$ tende a zero. Per il secondo integrale si ha

$$\int_{E_n-E}|f(x,y_n(x;\bar{\alpha}),y_0'(x))-f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx=$$

$$=\int_{E_n-E}|y_n(x;\bar{\alpha})-y_0(x)|\,|f_y(x,y_0(x)+\delta(x),y_0'(x))|\,dx.$$

Abbandonando da $E_n - E$ l'insieme dei punti nei quali $y_n(x; \bar{\alpha}) = y_0(x)$ si vede che

$$\int\limits_{E_n - E} | f(x, y_n(x; \bar{\alpha}), y_0'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x)) | \, dx \leq M \operatorname{Max} | y_n(x; \bar{\alpha}) - y_0(x) |$$

e dalla (1) segue che anche il secondo integrale dell'ultimo membro della (3) tende a zero con α.

Da qui e dalla (1) si deduce che, assegnato un numero $\eta > 0$, si può determinare un numero $\alpha^* > 0$ tale che per ogni $|\alpha| < \alpha^*$ la funzione $y_n(x; \bar{\alpha})$ soddisfi alle tre condizioni del teorema enunciato.

Con questo il teorema è dimostrato poichè ciascuna $y_n'(x; \bar{\alpha})$ è limitata in (a, b), e quindi per ottenere una funzione di classe 1 soddisfacente alle condizioni del teorema basta approssimare la curva di equazione $y = y_n(x; \bar{\alpha})$ con delle poligonali inscritte ed eseguire uno smussamento dei vertici.

OSSERVAZIONE. — *Poichè nella definizione delle funzioni* $y_n(x; \bar{\alpha})$ *non interviene la funzione* $f(x, y, y')$, *se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ *è una successione di numeri positivi tendenti a zero ed* $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ *sono i corrispondenti valori di* n, *determinati come sopra si è detto, la successione delle funzioni*

$$y_{n_1}(x; \bar{\alpha}_1), \quad y_{n_2}(x; \bar{\alpha}_2), \ldots, \quad y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), \ldots$$

è tale che, per ogni funzione $f(x, y, y')$ *soddisfacente alle condizioni del teorema si ha*

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b | f(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) - f(x, y_0(x), y_0'(x)) | \, dx = 0.$$

2. Da qui possiamo dedurre il teorema del TONELLI a cui abbiamo accennato sopra; ma per questo occorre ricordare alcune definizioni da lui poste nella sua Memoria.

Se $f(x, y, y')$ è una funzione finita e continua per (x, y) appartenente a D e y' finito qualunque, si dice che $f(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* α) se ad ogni parte limitata e chiusa D' di D si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che, per (x, y) appartenente a D' e y' finito qualunque, si abbia sempre

$$| f(x, y, y') | \leq \lambda + \Lambda | y' | ;$$

si dice che $f(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* β), se ammette ovunque finita in D la derivata $f_y(x, y, y')$ e ad ogni parte limitata e chiusa D' di D si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che, per (x, y) appartenente a D' e y' finito qualunque, si abbia

$$|f_y(x, y, y')| \leq \lambda + \Lambda |y'| ;$$

si dice infine che $f(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* γ) se ammette ovunque finita in D la derivata $f_y(x, y, y')$ e ad ogni parte limitata e chiusa D' di D si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che, per (x, y) appartenente a D' e y' finito qualunque, si abbia

$$|f_3(x, y, y')| \leq \lambda + \Lambda M(x, y'),$$

essendo $M(x, y')$ il minimo valore assoluto di $f(x, y, y')$ per tutti gli y tali che (x, y) appartenga a D'.

Dopo questo possiamo dimostrare il teorema del TONELLI.

TEOREMA. — *La funzione* $f(x, y, y')$ *sia finita e continua per* (x, y) *appartenente a un campo piano limitato aperto* D *e* y' *finito qualunque; sia*

$$C_0: \qquad y = y_0(x), \qquad\qquad (a \leq x \leq b),$$

una curva assolutamente continua del campo D [1] *per la quale esista finito l'integrale*

$$\int_a^b f(x, y_0(x), y_0'(x))dx.$$

In un intorno di C_0 *si abbia, per ogni* y' *finito,*

$$(4) \qquad |f(x, y, y')| \leq |f_1(x, y, y')| + |f_2(x, y, y')| + |f_3(x, y, y')| ,$$

essendo f_1, f_2, f_3 *tre funzioni soddisfacenti rispettivamente alle condizioni* α), β), γ), *ed essendo integrabili in* (a, b) *le funzioni* $f_2(x, y_0(x), y_0'(x))$, $f_3(x, y_0(x), y_0'(x))$.

Allora, assegnato ad arbitrio un numero positivo η, *si può determinare una funzione*

$$y = y(x) \qquad\qquad (a \leq x \leq b),$$

soddisfacente alle condizioni del teorema precedente.

Fissata una successione di numeri positivi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ tendenti a zero, consideriamo la corrispondente successione di funzioni

$$y_{n_1}(x; \bar{\alpha}_1), \quad y_{n_2}(x; \bar{\alpha}_2), \ldots, \quad y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), \ldots$$

e le curve rappresentatrici

$$C_1, \quad C_2, \ldots, \quad C_m, \ldots$$

[1] Il TONELLI considera nella sua Memoria anche il caso che il campo D sia chiuso e C_0 abbia qualche punto sulla frontiera di D.

di esse. Essendo

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| \leq \lambda_2 + \Lambda_2 |y'|, \quad \left|\frac{\partial f_3}{\partial y}\right| \leq \lambda_3 + \Lambda_3 M_3(x, y'),$$

avendo indicato con λ_2 e Λ_2 le costanti che compaiono nella condizione β) soddisfatta da f_2 e con λ_3, Λ_3, M_3, le costanti e la funzione che compaiono nella condizione γ) soddisfatta da f_3, le funzioni f_2 ed f_3 soddisfano alle condizioni del teorema del n. 1, e quindi per l'osservazione ivi fatta

$$(5) \quad \lim_{m \to \infty} \int_a^b | f_2(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) - f_2(x, y_0(x), y_0'(x)) | \, dx = 0,$$

$$(6) \quad \lim_{m \to \infty} \int_a^b | f_3(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) - f_3(x, y_0(x), y_0'(x)) | \, dx = 0.$$

Inoltre, poichè le lunghezze delle curve C_m convergono alla lunghezza di C_0 si ha

$$(7) \quad \lim_{m \to \infty} \int_a^b | f_1(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) - f_1(x, y_0(x), y_0'(x)) | \, dx = 0$$

per un teorema del TONELLI [1]. Dalle (5), (6), (7) segue

$$\int_a^b \{ | f_1(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) | + | f_2(\ldots) | + | f_3(\ldots) | \} \, dx \to$$

$$\to \int_a^b \{ | f_1(x, y_0(x), y_0'(x)) | + | f_2(\ldots) | + | f_3(\ldots) | \} \, dx.$$

Di qua e dalla (4), per un altro teorema del TONELLI [2], si ha

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b f(x, y_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m), y'_{n_m}(x; \bar{\alpha}_m)) \, dx = \int_a^b f(x, y_0(x), y_0'(x)) \, dx,$$

da cui segue subito il teorema enunciato.

(1) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I, pag. 364 e segg.
(2) V. loc. cit. nella nota prec..