Bollettino Unione Matematica Italiana

Clara Malacarne

Sull'analiticità delle funzioni regolarmente monotone

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 49–54.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sull'analiticità delle funzioni regolarmente monotone.

Nota di Clara Malacarne (a Viareggio).

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione di un teorema di* S. Bernstein *relativo alle funzioni da lui dette regolarmente monotone, e la si perfeziona in un punto importante. Seguono alcune applicazioni del teorema medesimo.*

È dovuto ad S. Bernstein (1) lo studio di quelle funzioni di una variabile reale definita in un dato intervallo, per le quali le differenze di ogni ordine, relative a un qualunque sistema di va-

(1) S. Bernstein, *Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle* (« Math. Annalen », 75, 1914, pp. 449-468). — Cfr. anche Fubini G., *I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor* (« Atti R. Acc. Scienze di Torino », 51, 1915-16, pp. 896-898). — Ascoli G., *Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale* (« Rend. Acc. Lincei », 6ª, 16, 2º sem. 1932, pp. 604-606).

lori crescenti ed equidistanti della variabile, contenuti nell' intervallo, e cioè le espressioni

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta^2 f(x) &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^n f(x) &= f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \\
&\quad + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) + \ldots + (-1)^n f(x),
\end{aligned}$$

(con $h > 0$) sono tutte positive o nulle.

Riguardo a tali funzioni, da lui dette *assolutamente monotone*, il BERNSTEIN ha dimostrato anzitutto che esse ammettono derivate di ogni ordine, positive o nulle, e poi che esse sono analitiche, e precisamente rappresentate in tutto l' intervallo dalla serie di TAYLOR relativa all' estremo sinistro dell' intervallo stesso.

Più recentemente, questi resultati sono stati ripresi dal BERNSTEIN in un libro assai noto (1) ove si accenna brevemente anche ad una loro notevole estensione. Essa riguarda quelle funzioni per le quali le differenze dei varî ordini, considerate più sopra, per ogni determinato valore di n sono nulle o di segno costante, ma questo segno può variare con n. Per queste funzioni, che vengono dette *regolarmente monotone*, si dimostra ancora, e con lo stesso metodo, l' esistenza delle derivate di ogni ordine, le quali sono nulle o di segno costante nell' intervallo. Si dimostra anche l' analiticità; ma al BERNSTEIN riesce solo provare che il raggio di convergenza dello sviluppo di TAYLOR relativo a un punto dell' intervallo è *almeno un quarto della distanza di esso dall' estremo più vicino*. Cosicchè per queste funzioni viene assicurata la regolarità nel piano complesso, in un campo (che sarebbe facile indicare) assai più ristretto di quello che si ha per le funzioni assolutamente monotone.

L' esposizione del BERNSTEIN, molto concisa, si fonda su resultati ottenuti in altra parte del libro citato, e relativi a tutt' altro ordine di idee. Sembra perciò desiderabile ottenerli in modo più diretto ed elementare e anche vedere se per il campo di regolarità di queste funzioni non si possa ottenere un resultato migliore.

Per consiglio del chiar.mo prof. G. ASCOLI, ho intrapreso qualche ricerca in questo senso, ottenendo un resultato che mi sembra corri-

(1) S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques* (Paris, 1926), p. 190 e segg.

sponda bene allo scopo propostomi. Ho potuto infatti dimostrare in modo molto semplice il seguente teorema:

A) *Se la funzione* f(x) *è regolarmente monotona per* $a < x < b$, *essa è rappresentata in tutto l'intervallo dalla sua serie di Taylor riferita al punto medio dell'intervallo medesimo.*

Si vede come con questo teorema venga notevolmente ampliato il campo del piano complesso ove si può assicurare la regolarità della funzione.

Nella presente Nota dimostrerò il teorema A), e farò vedere come da esso segua subito il resultato più ampio che si ha per le funzioni assolutamente monotone. Seguiranno due facili applicazioni del teorema dimostrato.

1. *a)* Per quanto abbiamo detto sopra, dall'ipotesi del teorema A) segue che la $f(x)$ possiede derivate determinate e finite di tutti gli ordini, nessuna delle quali cambia segno nell'intervallo. Perciò la $f(x)$ e le sue derivate saranno monotone in tutto l'intervallo.

b) Si scelgano comunque tra a e b i valori crescenti ed equidistanti $x_0 - h$, x_0, $x_0 + h$, e si ponga

$$|f(x_0+h) - f(x_0-h)| = \mu.$$

Per la monotonia di $f(x)$ sarà allora

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \mu, \qquad |f(x_0) - f(x_0-h)| \leq \mu.$$

Si ha inoltre

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(\xi_1), \qquad f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(\eta_1),$$
$$(x_0 - h < \eta_1 < x_0 < \xi_1 < x_0 + h),$$

da cui

$$|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \leq \frac{\mu}{h}, \qquad |f(\eta_1)| = \left|\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}\right| \leq \frac{\mu}{h}.$$

Ma $f'(\xi_1)$ e $f'(\eta_1)$ hanno ugual segno e $f'(x_0)$ è compreso tra essi, quindi è anche

$$|f'(x_0)| \leq \frac{\mu}{h}.$$

Proveremo ora in generale per induzione che, posto, secondo la formula di Taylor-Lagrange,

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi_n), \\ f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(\eta_n), \end{cases}$$

si ha per qualunque n

$$|f^{(n)}(\xi_n)| \leq \frac{\mu n!}{h^n}, \quad |f^{(n)}(\eta_n)| \leq \frac{\mu n!}{h^n}, \quad |f^{(n)}(x_0)| \leq \frac{\mu n!}{h^n}. \tag{2}$$

Le (2) valgono, come abbiamo visto, per $n=1$; supposto ora che valgano per un certo valore r di n, dimostriamo che valgono per $n=r+1$. Scritta la prima delle (1) per $n=r$ e $n=r+1$, confrontando si ha subîto

$$f^{(r)}(\xi_r) = f^{(r)}(x_0) + \frac{h}{r+1} f^{(r+1)}(\xi_{r+1})$$

da cui

$$|f^{(r+1)}(\xi_{r+1})| = \frac{r+1}{h} |f^{(r)}(\xi_r) - f^{(r)}(x_0)|.$$

Ora per le (2), che valgono per ipotesi per $n=r$, le quantità $f^{(r)}(\xi_r)$ e $f^{(r)}(x_0)$ sono in modulo non maggiori di $\frac{\mu r!}{h^r}$; poichè esse hanno segno concorde, lo stesso avverrà anche per la loro differenza, e quindi

$$|f^{(r+1)}(\xi_{r+1})| \leq \frac{r+1}{h} \frac{\mu r!}{h^r} = \frac{\mu(r+1)!}{h^{r+1}}.$$

È così provata la prima delle (2) per $n=r+1$; in modo analogo si prova la seconda. Da questa segue poi la terza poichè $f^{(r+1)}(\xi_{r+1})$ e $f^{(r+1)}(\eta_{r+1})$ hanno segno concorde, e $f^{(r+1)}(x_0)$ è compresa fra esse.

c) Sia ora (A, B) un intervallo tutto interno ad (a, b) e C il suo punto medio. Preso x_0 tra C e B, le (2) si potranno applicare prendendo $h = B - x_0$, e sostituendo a $\mu = |f(x_0+h) - f(x_0-h)|$ la quantità non minore $M = |f(B) - f(A)|$. Si ottiene così

$$|f^{(n)}(x_0)| \leq \frac{Mn!}{(B-x_0)^n}. \tag{3}$$

Analogamente se x_0 cade tra A e C sarà

$$|f^{(n)}(x_0)| \leq \frac{Mn!}{(x_0-A)^n}.$$

d) Consideriamo finalmente lo sviluppo di TAYLOR della $f(x)$ nell'intorno di C e il relativo termine complementare nella forma di CAUCHY

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} k^n f^{(n)}(C + \theta k) \qquad 0 < \theta < 1$$

dove si è posto $k = x - C$. Supposto, per es. $0 < k < B - C$, secondo la (3) si ha:

$$|R_n| \leq \frac{Mn(1-\theta)^{n-1}k^n}{(B-C-\theta k)^n} = \frac{M}{B-C-\theta k}\, n \left(\frac{k-\theta k}{B-C-\theta k}\right)^n <$$

$$< \frac{M}{B-C-k}\, n \left(\frac{k}{B-C}\right)^n$$

e di qui essendo $\frac{k}{B-C} < 1$, resulta che, per $n \to \infty$, R_n tende a zero in modo uniforme rispetto a θ. Analogamente avviene per $C - B < k < 0$.

Concludendo, lo sviluppo di Taylor della $f(x)$ riferito al punto C, rappresenta $f(x)$ in tutto (A, B). Basta ora supporre $C = \frac{a+b}{2}$ ed A e B prossimi quanto vogliamo ad a e b perchè il teorema possa dirsi dimostrato completamente.

2. Se la $f(x)$ è assolutamente monotona, e le sue derivate per $a < x < b$ sono quindi tutte positive o nulle, vale ancora, naturalmente, il resultato precedente. Quindi prendendo un punto x_0 tra a e $\frac{a+b}{2}$, la $f(x)$ è anche sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di x_0. Ora si vede subito che questo sviluppo ha un raggio di convergenza *almeno uguale* a $b - x_0$. Infatti per $0 < h < b - x_0$, la serie

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

avendo tutti i termini positivi o nulli, non può essere indeterminata; e poichè la somma dei suoi primi n termini è minore di $f(x_0 + h)$, (come si vede dalla formula abbreviata, dove il termine complementare è positivo) essa non è neppure divergente.

Poichè allora a è interno al cerchio di convergenza di questo sviluppo, vediamo che $f(x)$ si può definire in a, ed oltre, con le sue derivate, ed è sviluppabile in serie di Taylor riferita ad a, con raggio di convergenza non minore di $(b - x_0) - (x_0 - a)$ ossia di $b - a$, perchè x_0 può supporsi vicino ad a quanto si vuole.

Del resto il ragionamento fatto prima per x_0 si può ora ripetere anche per a, con lo stesso resultato.

3. *a) Se la* $y = f(x)$ *è definita per* $a < x < b$ *e ammette derivate di ogni ordine, e nessuna delle espressioni*

$$\varphi_n(x) = \binom{n}{0} y^{(n)} + \binom{n}{1} y^{(n-1)} + \ldots + \binom{n}{n} y$$

si annulla nell'intervallo, la y *è analitica e rappresentata in tutto l'intervallo della sua serie di Taylor riferita al punto medio dell'intervallo stesso.*

Infatti, posto $e^x y = z$ si ha subito

$$z^{(n)} = e^x \varphi_n(x).$$

Ne resulta che z è analitica e sviluppabile nel modo indicato; lo stesso avverrà quindi per $y = e^{-x} z$.

b) Se la $y = f(x)$ *è definita per* $a < x < b$ *e ammette derivate di ogni ordine, ed esistono le costanti* $c_1 c_2 \dots c_k$ *tali che per ogni* n *l'espressione*

$$\varphi_n(x) = c_1 y^{(n+1)} + c_2 y^{(n+2)} + \dots + c_k y^{(n+k)}$$

non si annulla nell'intervallo, la y *è analitica e rappresentata in tutto l'intervallo dalla sua serie di Taylor riferita al punto medio del medesimo intervallo.*

Infatti la $\varphi_n(x)$ è la derivata n^{ma} di

$$\varphi_0(x) = c_1 y' + c_2 y'' + \dots + c_k y^{(k)}; \tag{4}$$

poichè $\varphi_n(x)$ non muta mai segno, $\varphi_0(x)$ è analitica e regolare nel cerchio del piano complesso che ha per diametro il segmento ab. E allora essendo y soluzione dell'equazione differenziale (4), dalle note formule esplicite di risoluzione e anche dai teoremi generali sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti analitici resulta che y è analitica e regolare nel medesimo campo.