
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO MAMBRIANI

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. Nota 3^a

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.1, p. 10–16.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_10_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_10_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte.

Nota 3^a di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - Si continua e si termina quanto si espose in due Note precedenti (v. questo « Bollettino », vol. XIII (1934), pp. 217-222, pp. 284-288) relativamente al calcolo delle derivate di ordine superiore di una funzione composta con quante si vogliono variabili sia intermedie che indipendenti. Si danno altre due formule (la (19) e la (27) del testo) che forniscono, per le sopradette derivate generali, altre due espressioni degne di nota, generalizzazione rispettiva delle espressioni date, per le derivate delle funzioni di funzioni, da A. FAIS, da S. F. LACROIX e A. TERQUEM. La prima formula (cioè la (19)) viene chiamata « formula di AMALDI » perchè traduce in simboli l'algoritmo combinatorio per il calcolo delle dette derivate, stabilito nel 1917 dal prof. U. AMALDI.

6. Nella formula (6') della Nota 1^a (1) compare, a secondo membro, un prodotto isobarico (2) i cui fattori sono n potenze isobariche aventi per basi ordinatamente le forme differenziali (3)

$$\frac{y_1^{(s_1, \dots, s_m)}}{s_1! \dots s_m!} - y_1^{\varepsilon_{s_1, \dots, s_m}}, \quad \frac{y_n^{(s_1, \dots, s_m)}}{s_1! \dots s_m!} - y_n^{\varepsilon_{s_1, \dots, s_m}}$$

e per esponenti rispettivamente i numeri interi positivi o, in parte, nulli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (4). Osserviamo che ogni tale potenza isobarica avente esponente $\alpha_v = 0$ coincide esattamente con $\varepsilon_{s_1, \dots, s_m}$ e può sopprimersi come fattore nel secondo membro di (6'). Fatte queste soppressioni, nel secondo membro di (6') sostituiamo ad ogni potenza isobarica le corrispondenti ripetute moltiplicazioni isobariche della

(1) Cfr. il vol. XIII (1934) del presente « Bollettino »: Nota 1^a, pp. 217-222; Nota 2^a, pp. 284-288. La presente Nota è continuazione e fine delle due Note ora nominate, le quali saranno richiamate nel presente lavoro semplicemente con « Nota 1^a » e « Nota 2^a ».

(2) V. la Nota 2^a, richiamo (2).

(3) Ricordiamo che si è posto per brevità (Nota 1^a):

$$\frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} y_\nu(x_1, \dots, x_m) = y_\nu^{(s_1, \dots, s_m)},$$

e che inoltre è:

$$\varepsilon_{s_1, \dots, s_m} = \varepsilon_{s_1} \dots \varepsilon_{s_m} = \begin{cases} 1 & \text{per } s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0, \\ 0 & \text{in ogni altro caso.} \end{cases}$$

(4) Nella formula (6') è stato scritto erroneamente come ultimo esponente α_1 in luogo di α_n .

base per se stessa, e poi sviluppiamo (conformemente alla definizione di moltiplicazione isobarica) tutte le moltiplicazioni che così risultano nel detto secondo membro. Si ottiene in tale modo subito, pel simbolo $H_{s_1, \dots, s_m}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ dell'AMALDI, l'espressione:

$$(16) \quad H_{s_1, \dots, s_m}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \sum_{\sigma} \prod_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^{\alpha_{\nu}} \frac{y_{\nu}^{(\sigma_1, \nu, r, \dots, \sigma_m, \nu, r)}}{\sigma_{1, \nu, r}! \dots \sigma_{m, \nu, r}!}.$$

dove: 1°) l'accento posto al segno di prodotto relativo a ν sta a denotare *soppressione* dei fattori corrispondenti a valori ν pei quali è $\alpha_{\nu} = 0$;

2°) la sommatoria relativa a σ va estesa ad ogni possibile sistema di m -ple:

$$(17) \quad \sigma_{1, \nu, r, \dots, \sigma_m, \nu, r} \quad (r = 1, \dots, \alpha_{\nu}; \nu = 1, \dots, n),$$

i numeri σ essendo degli interi, positivi o nulli, tali che in ciascun sistema di m -uple i numeri di una stessa m -upla non siano contemporaneamente nulli ⁽⁵⁾, e inoltre la somma di tutti i primi numeri delle m -uple sia uguale a s_1 , la somma di tutti i secondi numeri delle m -uple sia uguale a s_2 , ecc., sia cioè:

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^n \sum_{r=1}^{\alpha_{\nu}} \sigma_{\mu, \nu, r} = s_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

(l'accento posto alla sommatoria relativa all'indice ν sta a indicare soppressione dei termini corrispondenti a indici ν pei quali è $\alpha_{\nu} = 0$).

Abbiamo così tradotto in formula l'algoritmo combinatorio stabilito dall'Amaldi ⁽⁶⁾ pel calcolo delle forme differenziali H .

Sostituendo nella (3) (Nota 1^a) la espressione di H data da (16), si ottiene, per la derivazione di ordine superiore di una generica funzione composta

$$f(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)).$$

(⁵) Ciò dipende dal semplice fatto che è

$$\frac{y_{\nu}^{(\sigma_1, \nu, r, \dots, \sigma_m, \nu, r)}}{\sigma_{1, \nu, r}! \dots \sigma_{m, \nu, r}!} - y_{\nu} \varepsilon_{\sigma_1, \nu, r, \dots, \sigma_m, \nu, r} = 0.$$

per $\sigma_{1, \nu, r} = \dots = \sigma_{m, \nu, r} = 0$.

(⁶) U. AMALDI, *Sulle derivate successive delle funzioni composte di quante si vogliono variabili*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », t. XLII (1917), pp. 94-115.

la formula, che si può giustamente chiamare *formula di Amaldi*.

$$(19) \quad \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m} f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = \\ = \sum_x \frac{s_1! \dots s_m!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} \sum_{\sigma} \prod_{\nu=1}^n \prod_{r=1}^{\alpha_{\nu}} \frac{y_{\nu}^{(\sigma_1, \nu, r, \dots, \sigma_m, \nu, r)}}{\sigma_1, \nu, r! \dots \sigma_m, \nu, r!}.$$

dove, nel secondo membro, la sommatoria relativa ad x va estesa a tutti i possibili sistemi di numeri interi, positivi o, in parte, nulli, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che sia $0 < \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq s_1 + \dots + s_m$, e dove la sommatoria relativa a σ va estesa come si è detto per la formula (16).

La (19) dà la completa generalizzazione della nota formula per una funzione di funzione (caso $m = 1$, $n = 1$):

$$(20) \quad \frac{d^s}{dx^s} f(y(x)) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{s!}{\alpha!} \frac{d^{\alpha} f(y)}{dy^{\alpha}} \sum_{\sigma} \prod_{r=1}^{\alpha} \frac{y^{(\sigma_r)}}{\sigma_r!},$$

dove la sommatoria relativa a σ va estesa a ogni possibile sistema

$$\sigma_r \quad (r = 1, \dots, \alpha)$$

di numeri interi, positivi e *non nulli*, tali che sia $\sigma_1 + \dots + \sigma_{\alpha} = s$.

La formula particolare (20) venne stabilita nel 1875, e sembra per la prima volta (7), da A. FAIS (8), il quale la dedusse dalla formula (9) (Nota 2^a) di R. HOPPE. Pure nel 1875 F. MOSSA (9), sotto la direzione del Fais, dedusse per altra via la (20) e generalizzò poi tale formula a una funzione composta $f(y_1(x), \dots, y_n(x))$. Nel 1885 E. CESÀRO (10) ritrovò come nuova la (20), fondandosi

(7) Cfr. U. AMALDI, *Forme isobariche e cambiamenti di variabile*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. LVI, 9^o della 3^a série (1918), pp. 1-41: vedasi, in particolare, pag. 13, richiamo (17).

(8) A. FAIS, *Nota intorno alle derivate d'ordine superiore delle funzioni di funzione*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. XIII (1875), pp. 47-48.

(9) F. MOSSA, *Sulla derivazione successiva delle funzioni composte*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. XIII (1875), pp. 175-185. Cfr., in particolare, pag. 180, formula (6).

(10) E. CESÀRO, *Dérivées des fonctions de fonctions*, « Nouvelles Annales de Mathém. », s. 3, t. IV (1885), pp. 41-55. Cfr. anche, dello stesso Autore: *Corso di Analisi algebrica*, Torino, 1894 (v. le pp. 496-499); *Elementi di Calcolo infinitesimale*, 2^a ediz., Napoli, 1905 (v. le pp. 515-517). Il CESÀRO usa il simbolo

$$\sum_s \frac{\alpha y^{(\sigma)}}{\sigma!}, \quad \text{con lo stesso significato} \quad \sum_{\sigma} \prod_{r=1}^{\alpha} \frac{y^{(\sigma_r)}}{\sigma_r!} \quad (\sigma_1 + \dots + \sigma_{\alpha} = s).$$

sul così detto Calcolo isobarico. Recentemente U. BROGGI ⁽¹⁾ ritornò indirettamente sulla deduzione della (20), ponendosi dal punto di vista del Cesàro.

7. Il secondo membro della formula (6') (Nota 1^a) si può sviluppare in un altro modo, pure degno di nota. Osserviamo, dapprima, che se $[u_{s_1, \dots, s_m}]$ è una successione m -upla ed α è un intero non negativo, si ha, per la potenza isobarica $u_{s_1, \dots, s_m}^{(\alpha)}$, la seguente espressione ⁽¹²⁾:

$$(21) \quad u_{s_1, \dots, s_m}^{(\alpha)} = \alpha! \sum_r \prod_{i_1=0}^{s_1} \dots \prod_{i_m=0}^{s_m} \frac{1}{r_{i_1, \dots, i_m}!} u_{i_1, \dots, i_m}^{r_{i_1, \dots, i_m}},$$

dove la sommatoria va estesa a *tutti* i sistemi di numeri interi, positivi o nulli,

$$r_{i_1, \dots, i_m} \quad (i_1 = 0, 1, \dots, s_1; \dots; i_m = 0, 1, \dots, s_m),$$

tali che sia:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum_{i_m=0}^{s_m} r_{i_1, \dots, i_m} = \alpha, \\ \sum_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum_{i_m=0}^{s_m} i_\nu r_{i_1, \dots, i_m} = s_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right.$$

Nel secondo membro di (6') sviluppiamo ora, mediante la formula (21), le n potenze isobariche che compaiono, e poi svolgiamo, come al numero precedente, le n moltiplicazioni isobariche; allora si ottiene:

$$(23) \quad \frac{1}{z_1! \dots z_n!} H_{s_1, \dots, s_m}^{z_1, \dots, z_n} = \\ = \sum_{\sigma} \prod_{\nu=1}^n \sum_r \prod_{i_1=0}^{\sigma_{1,\nu}} \dots \prod_{i_m=0}^{\sigma_{m,\nu}} \frac{1}{r_{i_1, \dots, i_m}!} \left(\frac{y_\nu^{(i_1, \dots, i_m)}}{i_1! \dots i_m!} \right)^{r_{i_1, \dots, i_m}},$$

(11) U. BROGGI, *Sullo sviluppo di* $\sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n \left(\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \right)^n \right]$ *in serie di potenze crescenti di* x , « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », s. 6^a, vol. XV (1932), pagine 122-125.

(12) Tale espressione è una generalizzazione di una formula già data, per le successioni semplici, nella mia *Algebra delle successioni*, e sulla quale ritornerò in un prossimo lavoro.

dove: 1°) la sommatoria relativa a r va estesa a tutti i sistemi di numeri interi, positivi o nulli,

$$(24) \quad r_{\nu, i_1, \dots, i_m} \quad (i_1 = 0, 1, \dots, \sigma_{1, \nu}; \dots; i_m = 0, 1, \dots, \sigma_{m, \nu}),$$

tali che sia

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{\nu, 0, \dots, 0} = 0, \\ \sum_{i_1=0}^{\sigma_{1, \nu}} \dots \sum_{i_m=0}^{\sigma_{m, \nu}} r_{\nu, i_1, \dots, i_m} = \alpha_{\nu}, \\ \sum_{i_1=0}^{\sigma_{1, \nu}} \dots \sum_{i_m=0}^{\sigma_{m, \nu}} i_{\mu} r_{\nu, i_1, \dots, i_m} = \sigma_{\mu, \nu} \quad (\mu = 1, \dots, m); \end{array} \right.$$

2°) la sommatoria relativa a σ va estesa a tutti i sistemi di numeri interi, positivi o nulli, $\sigma_{1, \nu}, \dots, \sigma_{m, \nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$), tali che sia

$$(26) \quad \sum_{\nu=1}^n \sigma_{\mu, \nu} = s_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Dall'esame delle (25) e (26) segue poi che nella (23) i due segni sommatori del secondo membro si possono sostituire con un solo segno sommatorio nel modo seguente:

$$(23) \quad \frac{1}{z_1! \dots z_n!} H^{z_1, \dots, z_n} = \\ = \sum_r \prod_{\nu=1}^n \prod_{i_1=0}^{s_1} \dots \prod_{i_m=0}^{s_m} \frac{1}{r_{\nu, i_1, \dots, i_m}!} \left(\frac{y_{\nu}^{(i_1, \dots, i_m)}}{i_1! \dots i_m!} \right) r_{\nu, i_1, \dots, i_m},$$

dove la sommatoria relativa a r va estesa a tutti i sistemi di numeri interi, positivi o nulli,

$$(24) \quad r_{\nu, i_1, \dots, i_m} \\ (\nu = 1, \dots, n; i_1 = 0, 1, \dots, s_1; \dots; i_m = 0, 1, \dots, s_m),$$

tali che sia

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{\nu, 0, \dots, 0} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ \sum_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum_{i_m=0}^{s_m} r_{\nu, i_1, \dots, i_m} = \alpha_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ \sum_{\nu=1}^n \sum_{i_1=0}^{s_1} \dots \sum_{i_m=0}^{s_m} i_{\mu} r_{\nu, i_1, \dots, i_m} = s_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, m). \end{array} \right.$$

Sostituendo nella (3) (Nota 1^a) la espressione di H data da (23'), si ottiene, per la derivazione di ordine superiore di una generica funzione composta

$$f(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)),$$

la formula:

$$(27) \quad \frac{1}{s_1! \dots s_m!} \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m} f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = \sum_x \frac{\partial^{x_1 + \dots + x_n} f}{\partial y_1^{x_1} \dots \partial y_n^{x_n}} \sum_r \prod_{v=1}^n \prod_{i=0}^{s_1} \dots$$

$$\dots \prod_{i_m=0}^{s_m} \frac{1}{r_v, i_1, \dots, i_m!} \left(\frac{y_v^{(i_1, \dots, i_m)}}{i_1! \dots i_m!} \right)^{r_v, i_1, \dots, i_m},$$

dove: 1°) la sommatoria relativa ad x va estesa (come sempre in precedenza) a tutti i sistemi di numeri interi, positivi o, in parte, nulli, x_1, \dots, x_n , tali che sia $0 < x_1 + \dots + x_n \leq s_1 + \dots + s_m$;

2°) la sommatoria relativa a r va estesa come si è detto per la (23').

La (27) dà la completa generalizzazione della nota formula per una funzione di funzione (caso $m = 1, n = 1$):

$$(28) \quad \frac{1}{s!} \frac{d^s}{dx^s} f(y(x)) = \sum_{z=1}^s \frac{d^z f(y)}{dy^z} \sum_r \prod_{i=1}^s \frac{1}{r_i!} \left(\frac{y^{(i)}}{i!} \right)^{r_i},$$

dove la sommatoria relativa a r va estesa a tutti i sistemi di numeri interi, positivi o nulli, r_i ($i = 1, \dots, s$) tali che sia

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \dots + r_s = z, \\ r_1 + 2r_2 + \dots + sr_s = s. \end{cases}$$

Ecco, in ordine cronologico, diversi Autori che si sono occupati di (28) e di sue parziali generalizzazioni:

Nel 1810 S. F. LACROIX ⁽¹³⁾ — come asserisce l'Amaldi ⁽¹⁴⁾ — ha dato la (28) senza dimostrazione, riconnettendola alle ricerche dell'Arbogast e del Kramp sullo sviluppo delle funzioni in serie di potenze. Nel 1850 A. TERQUEM ⁽¹⁵⁾ diede una dimostrazione

⁽¹³⁾ S. F. LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, 2^a ediz. (1810), t. I (pp. 315-326), t. III (pag. 629).

⁽¹⁴⁾ Loc. cit. in (?), cfr. pag. 13, richiamo ⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁵⁾ A. TERQUEM, *Sur la différentiation des fonctions de fonctions*, « Nouvelles Annales de Math. », s. 1^a, t. IX (1850), pp. 119-125; cfr., in particolare, pag. 122.

semplice della (28), prendendo l'esponenziale e^{xy} come funzione ausiliaria. Nel 1855 F. FAÀ DI BRUNO ⁽¹⁶⁾ ritrovò, come nuova ⁽¹⁷⁾, la (28). Nel 1858 E. FERGOLA ⁽¹⁸⁾ generalizzò la (28) al caso della funzione composta $f(y_1(x), \dots, y_n(x))$. Nel 1871 R. MOST ⁽¹⁹⁾, ignorando i lavori precedenti, ristabilì ancora la (28) partendo dalla formula (9) (Nota 2^a) di R. Hoppe e sfruttando la formula integrale di Cauchy; collo stesso metodo generalizzò la (28) al caso della funzione composta $f(y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, ritrovando la generalizzazione precedente del Fergola. Nel 1874 O. STOLZ ⁽²⁰⁾, in un lavoro di Geometria algebrica, diede incidentalmente la generalizzazione della (28) al caso della funzione composta $f(x, y(x))$. Nel 1890 FR. MEYER ⁽²¹⁾ attribuì la (28) al Faà di Bruno, e ne diede una dimostrazione mediante gli sviluppi in serie di Taylor. Nel 1918 F. ENRIQUES ⁽²²⁾, servendosi della teoria degli operatori, ha dato, per la derivazione di ordine superiore delle funzioni composte $f(x, y(x))$, $f(y_1(x), y_2(x))$, delle formule che si presentano come estensioni della (28).

⁽¹⁶⁾ F. FAÀ DI BRUNO, *Sullo sviluppo delle funzioni*, « Annali Scienze Matem. e Fis. » di B. TORTOLINI, t. VI (1855), pp. 479-480. Cfr. anche, dello stesso Autore: *Théorie générale de l'élimination*, Paris, 1859 (vedasi, in particolare, pag. 3, formula (12)).

⁽¹⁷⁾ Il FAÀ DI BRUNO nel suo lavoro, *Sur le développement des fonctions rationnelles* (« American Journal of Mathematics », vol. V (1882), pp. 238-240) dice: « Pour arriver maintenant au développement du second membre nous aurons recours à un théorème très utile que nous avons donné pour la première fois en 1855 dans les *Annales de Tortolini* et qui se trouve reproduit dans notre *Théorie des formes binaires* ».

⁽¹⁸⁾ E. FERGOLA, *Sopra due formule di Calcolo differenziale*, « Annali di Matematica pura e applicata », t. I (1858), pp. 370-378.

⁽¹⁹⁾ R. MOST, *Ueber die höheren Differentialquotienten*, « Math. Ann. », Bd. IV (1871), pp. 490-504.

⁽²⁰⁾ O. STOLZ, *Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven*, « Math. Ann. », Bd. VIII (1875), pp. 415-443.

⁽²¹⁾ FR. MEYER, *Ueber algebraische Relationen zwischen den Entwicklungskoeffizienten höherer Differentiale*, « Math. Ann. », Bd. XXXVI (1890), pp. 453-465; cfr., in particolare, il § 5.

⁽²²⁾ F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, 1918, Vol. II, cfr. pp. 459-469 e pp. 478-482.