SALVATORE PINCHERLE

Una generalizzazione del concetto di divisibilità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.1, p. 17–20.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Una generalizzazione del concetto di divisibilità.

Nota di SALVATORE PINCHERLE (a Bologna).

Sunto. - *Si fa notare, mediante un esempio semplice, come il concetto di divisibilità dei polinomi sia suscettibile di ampia generalizzazione.*

A più riprese [1] ho accennato al fatto che la nozione elementare di divisibilità di un polinomio o di una serie di potenze per il binomio $a - x$, colle relative conseguenze, non sia che un caso particolare, a dir vero il più semplice ed ovvio, di un concetto che si presenta spontaneo nella teoria degli operatori lineari. Onde richiamare l'attenzione su questo concetto, che verrà considerato altrove nella sua generalità, ne viene fatta in questa breve Nota l'applicazione ad un caso semplice pel quale bastano considerazioni delle più elementari, ma che permette di scorgere come le ipotesi qui poste per conferire all'esposizione il carattere di massima semplicità siano suscettibili di ampia estensione in direzioni svariate.

1. Verrà indicato con S l'insieme delle funzioni intere (generalmente trascendenti ed eccezionalmente razionali) di una variabile x: ogni funzione intera è un elemento di questo insieme, evidentemente lineare; l'elemento $f(x) = \Sigma a_n x^n$ è dato dalla successione $(a_n) = a_0, a_1, \ldots$ (successione ologena) dei suoi coefficienti. Sia data inoltre una successione $h_0, h_1, \ldots h_n$, di numeri reali o complessi, tutti diversi da zero e tale che il rapporto $h_{n+1} : h_n$, tenda, per n tendente all'infinito, ad un numero finito h. Questa successione si denoterà con (h_n).

In seguito alle ipotesi sulle successioni (a_n) ed (h_n), la serie $\Sigma a_n h_n$ è convergente; quando la sua somma è nulla, si dirà che la $f(x)$ è ortogonale alla (h_n). L'insieme degli elementi di S (ortogonali ad (h_n)) costituisce un sotto-insieme lineare di S, che verrà indicato con S_h [2].

[1] V. in particolare la conferenza: *Sopra una estensione del concetto di divisibilità,* nel T. III delle pubblicazioni del « Seminario di Matematica e Fisica di Milano », (1929).

[2] Nel caso banale in cui la successione h_n si riduce alla progressione geometrica 1, h, h^2, h^3,..., la relazione di ortogonalità di $f(x) = \Sigma a_n x_n$ alla (h_n) esprime che h è radice di $f(x)$. Per accentuare l'analogia del caso che forma oggetto di questa Nota col caso elementare ora ricordato, si potrebbe dare al limite di $h_{n+1} : h_n$ il nome di *pseudo-radice* della $f(x)$ ortogonale ad (h_n).

2. Nel caso triviale ricordato in nota, tutti e soli gli elementi di S_h si ottengono moltiplicando per $h - x$ gli elementi di S; si può dire che l'operazione di moltiplicazione proietta l'insieme S nel suo sotto-insieme S_h. Nel caso più generale definito nel n. 1, la proiezione di S in S_h viene pure eseguita mediante un operatore A che generalizza la moltiplicazione per $h - x$; questo operatore rimane definito in S dalla condizione di essere lineare e di trasformare l'elemento x^n di S mediante la relazione

$$A(x^n) = \frac{h_{n+1}}{h_n} x^n - x^{n+1}. \tag{1}$$

3. Applicando l'operatore A così definito all'elemento $f(x) = \Sigma a_n x^n$ di S, si ottiene come risultato un elemento $\varphi(x) = \Sigma g_n x^n$, pure appartenente ad S, e i cui coefficienti g_n sono legati agli a_n dalle relazioni

$$g_0 = a_0 \frac{h_1}{h_0}, \quad g_1 = a_1 \frac{h_2}{h_1} - a_0, \ldots \quad g_n = a_n \frac{h_{n+1}}{h_n} - a_{n-1}, \ldots ; \tag{2}$$

se ora si forma la somma $\sum_{n=0}^{m} g_n h_n$, questa si riduce al solo termine $a_m h_{m+1}$, il quale, per essere la successione (a_n) ologene e per l'ipotesi fatta sulla successione h_n, tende a zero per m tendente all'infinito. Il risultato dell'operazione A sull'elemento $f(x)$ di S è dunque ortogonale ad (h_n); in altri termini, gli elementi di S sono proiettati in S_h dall'operatore A.

4. Reciprocamente, dato un elemento $\varphi(x) = \Sigma g_n x^n$ di S_h, esiste un elemento (ed un solo) di S di cui $\varphi(x)$ è la proiezione mediante l'operatore A. Infatti, si ricava dalle (2)

$$a_0 = g_0 \frac{h_0}{h_1}, \quad a_1 = \frac{1}{h_2}(g_0 h_0 + g_1 h_1), \ldots \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{h_{n+1}}(g_0 h_0 + g_1 h_1 + \ldots + g_n h_n), \ldots$$

ma poichè la $\varphi(x)$ è ortogonale ad (h_n), il numeratore di a_n si può scrivere

$$-\left(g_{n+1} + g_{n+2} \frac{h_{n+2}}{h_{n+1}} + g_{n+3} \frac{h_{n+3}}{h_{n+1}} + \ldots\right),$$

e, come si vede facilmente, ne segue che la successione (a_n) è ologene. Risulta così dimostrato che $\varphi(x)$ è la proiezione, mediante A, dell'elemento $\Sigma a_n x^n$ di S.

5. Sia ora $\varphi(x)$ un elemento di S, ma non di S_h, per modo che la serie assolutamente convergente $\Sigma h_n g_n$ ha una somma diversa da zero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n g_n = s \neq 0.$$

La funzione

$$g_0 - \frac{s}{h_0} + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

è dunque ortogonale ad (h_n): pertanto, applicandole l'operatore A^{-1}, si ottiene, per il numero precedente, un elemento $f(x)$ di S.

Si ha dunque

$$A^{-1}(\varphi(x)) = f(x) + sA^{-1}\left(\frac{1}{h_0}\right),$$

il che significa che, mentre l'operatore A^{-1} produce, dagli elementi di S_h, elementi di S, esso produce invece, dagli elementi di S non ortogonali ad (h_n), funzioni che differiscono da elementi di S per l'aggiunta della funzione $A^{-1}(1)$ moltiplicata per una costante.

6. La forma di $A^{-1}\left(\frac{1}{h_0}\right)$ si deduce immediatamente dalle (2); basta fare in queste $g_0 = \frac{1}{h_0}$, $g_1 = g_2 = \dots = 0$, e ne viene

$$a_0 = \frac{1}{h_1}, \quad a_1 = \frac{1}{h_2}, \dots \quad a_n = \frac{1}{h_{n+1}}.$$

Si ha dunque

$$A^{-1}\left(\frac{1}{h_0}\right) = \eta(x) = \frac{1}{h_1} + \frac{x}{h_2} + \dots + \frac{x^n}{h_{n+1}} + \dots.$$

Dall'ipotesi fatta sulle h_r, segue che il rapporto di un termine al precedente in questa serie tende al limite $\frac{x}{h}$. Pertanto, $|h|$ è il raggio di convergenza della serie, e la funzione da essa definita ammette sulla circonferenza $|x| = |h|$, un insieme di punti singolari, fra i quali, per un noto teorema di FABRY [1], si trova necessariamente il punto h, che si potrebbe perciò dire *pseudo-polo*.

7. Riassumendo, gli operatori A ed A^{-1} sono, nello spazio S, la generalizzazione della moltiplicazione e della divisione per $h - x$;

[1] V. HADAMARD et MANDELBROJT, *La série de Taylor*, pag. 45. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

la relazione di ortogonalità è la generalizzazione della condizione di divisibilità; l'operatore A^{-1}, applicato agli elementi di S_h, produce elementi di S, mentre, applicato ad elementi $f(x)$ di S non appartenenti ad S_h, produce funzioni aventi le stesse singolarità di $\eta(x)$, nel senso che esiste una costante c tale che $A^{-1}(f(x)) - c\eta(x)$ non ammette tali singolarità.

Come si è accennato in principio, le considerazioni precedenti sono suscettibili di ampie estensioni. Indichiamo soltanto queste: la sostituzione, all'insieme delle funzioni intere, dell'insieme delle serie di potenze aventi un raggio di convergenza superiore ad $|h|$, e nella definizione dell'operatore A, la sostituzione, ai binomi $\frac{h_{n+1}}{h_n} x^n - x^{n-1}$, dei polinomi di grado fisso r, $a_{n0} + a_{n1}x + \ldots + a_{nr}x^r$.