Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Giovanni Sansone, Giovanni Ricci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.1, p. 21–26.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_21_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

GIOVANNI SANSONE: *Sulla convergenza delle serie di polinomi di Legendre* (in corso di pubblicazione negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », (2), V).

Le serie trigonometriche $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ di funzioni sommabili i cui coefficienti soddisfino una condizione unilaterale di LANDAU

$$a_n > -k/n, \quad b_n > -k/n, \quad k > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sono state investigate da FEJÉR, HARDY e LITTLEWOOD, PALEY, SZÀSZ, e noi ci siamo proposti un analogo studio delle serie di LEGENDRE

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

di funzioni $f(x)$ sommabili in $(-1, 1)$ i cui coefficienti soddisfino la condizione

$$(2) \qquad a_n > -k/n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k > 0,$$

oppure l'altra

$$(3) \qquad |a_n| < kn^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k > 0,$$

nei casi in cui $f(x)$ sia limitata, oppure continua, oppure sommabile.

Abbiamo dimostrato le seguenti proposizioni:

a) Se i coefficienti a_n della serie (1) soddisfano le (2), allora

1°) Se $|f(x)| \leq L$, qualunque sia x in $(-1, 1)$, è anche

$$-3k\left[\lg\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{299}{990}\right] - 27L < \sum_{r=0}^{n} a_r P_r(x) < 3k\left[\lg 2 + \frac{2081}{1680}\right] + \frac{165}{4}L,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2°) Se $f(x)$ è continua in $(-1, 1)$ la serie di LEGENDRE di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in $(-1, 1)$;

3°) Condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia convergente per $x=1$ ed abbia per somma s è che

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} \int_x^1 f(x) dx = s; \tag{4}$$

e condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia convergente nei punti 1 e x' e in x' abbia per somma s' è che esista il limite (4) e sia anche

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{2\pi(1-x)} \int_x^1 dt \int_0^{2\pi} f\left[tx' + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta\right] d\theta = s'.$$

b) Se i coefficienti a_n della (1) soddisfano le (3), allora:

1°) Se $|f(x)| \leq L$, qualunque sia x interno a $(-1, 1)$ è anche

$$\left|\sum_{r=0}^{n} a_r P_r(x)\right| < \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{\sqrt[4]{1-x^2}} \left[\lg \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{299}{990}\right] + yL,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2°) Se $f(x)$ è continua in $(-1, 1)$ la serie di LEGENDRE di $f(x)$ converge uniformemente verso $f(x)$ in qualunque intervallo *interno* a $(-1, 1)$;

3°) Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie (1) converga in un punto x' *interno* a $(-1, 1)$ ed ivi abbia per somma s' è che

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{2\pi(1-x)} \int_x^1 dt \int_0^{2\pi} f\left[tx' + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x'^2}\cos\theta\right] d\theta = s'.$$

GIOVANNI RICCI: *Sul settimo problema di Hilbert* (di prossima pubblicazione in « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa »).

Recentemente A. GELFOND (1934) ha dato completa risposta ad un problema posto nel 1900 da D. HILBERT col dimostrare che: « Se ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) è algebrico e η è algebrico irrazionale, allora ξ^{η} è trascendente ». Sulla questione erano note proposizioni concernenti casi particolari (A. GELFOND (1929), C. SIEGEL (1930), R. KUZMIN (1930), K. BOEHLE (1933)).

Nel presente lavoro, facendo uso del metodo di A. GELFOND e di una formula di interpolazione, si dimostra la proposizione che riportiamo qui sotto. Essa enuncia in termini precisi un'affermazione che, presentata in forma semplice e molto grossolana, potrebbe dire così: « ξ^η è trascendente quando ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) e η (irrazionale) sono approssimabili abbastanza velocemente con numeri algebrici ».

Precisamente vale il

TEOREMA I. — Siano assegnate $k+1$ successioni ($k \geq 1$) di numeri algebrici tutte convergenti

$$(\xi_1, \xi_2, \dots \to \xi), \quad (\eta_{1,1}\ \eta_{1,2}, \dots \to \eta_1), \dots, \quad (\eta_{k,1}\ \eta_{k,2}, \dots \to \eta_k),$$

e diciamone rispettivamente ξ, $\eta_1, \dots, \eta_k$ i valori limiti. Supponiamo $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$.

Denotiamo, per $r = 1, 2, 3, \dots$, con:

g_r il grado di un corpo algebrico K_r contenente ξ_r, $\eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$,

x_r il minimo intero razionale positivo per cui $x_r \xi_r$ è intero (algebrico),

y_r il minimo intero razionale positivo per cui $y_r \eta_{1,r}, \dots, y_r \eta_{k,r}$ sono tutti interi (algebrici),

$$\delta_r = \operatorname{Max}(|\xi - \xi_r|, \ |\eta_1 - \eta_{1,r}|, \dots, \ |\eta_k - \eta_{k,r}|),$$

$$X_r = \operatorname{Max}(|\overline{\xi_r}|)\ (^1), \qquad Y_r = \operatorname{Max}(|\overline{\eta}_{1,r}|, \dots, |\overline{\eta}_{k,r}|),$$

Λ_r la quota fino alla quale i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti (²).

Allora dei k numeri (³)

$$\xi^{\eta_1}, \quad \xi^{\eta_2}, \dots, \quad \xi^{\eta_k}$$

uno almeno è trascendente quando esistono tre numeri reali ρ, σ, θ

(¹) Se ξ, $\eta, \dots, \zeta$ sono numeri algebrici con $\operatorname{Max}(|\overline{\xi}|, |\overline{\eta}|, \dots, |\overline{\zeta}|)$ denoteremo il massimo modulo di ξ, $\eta, \dots, \zeta$ e di tutti i loro coniugati.

(²) Siano $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ numeri complessi qualunque; se Λ è l'estremo superiore dei numeri positivi λ tali che il sistema

$$c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + \dots + c_h\zeta_h = 0, \quad |c_1| \leq \lambda, \quad |c_2| \leq \lambda, \dots, \quad |c_h| \leq \lambda,$$
$$(c_1, c_2, \dots, c_h \text{ razionali interi})$$

porti di conseguenza $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$, diremo che $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ sono linearmente indipendenti fino alla quota Λ (o anche: almeno fino alla quota λ). Quando $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ sono linearmente indipendenti nel senso ordinario, risulta $\Lambda = +\infty$. La locuzione introdotta ammette una ovvia giustificazione geometrica.

(³) Con ξ^η intenderemo $e^{\eta \log \xi}$ per una determinazione fissata di $\log \xi$.

pei quali sono verificate tutte e tre le condizioni seguenti:

a) $$0 < \rho < \rho + \sigma < 1, \quad \theta > 1 + \frac{1}{k},$$

b) $$\left(g_r^{\theta - \frac{1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{1}{k\theta}} = O(\Lambda_r),$$

c) $$\left\{\begin{array}{l} g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r \log (ey_r Y_r) \}^{\frac{\theta}{\rho}} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \\ g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r \log (ex_r X_r) \}^{\frac{\theta}{\sigma}} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \\ g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r^2 \log (ey_r Y_r) \}^{\theta_1} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad \left(\theta_1 = \frac{k\theta}{k\theta - k - 1}\right). \end{array}\right.$$

Nel caso semplice $k = 1$, soddisfatte le condizioni precedenti, si conclude che ξ^{η} è trascendente $(\eta_1 = \eta)$.

Conveniamo di porre: $\log \frac{1}{\delta_r} = + \infty$ per $\delta_r = 0$;

$$\left(g_r^{\theta - \frac{1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{1}{k\theta}} \leqq \Lambda_r \text{ per } \delta_r = 0 \text{ e } \Lambda_r = + \infty.$$

Da questa proposizione generale possiamo trarre come conseguenze immediate le seguenti.

II). — Supponiamo che esistano un intero razionale N e un numero positivo L (ambedue indipendenti da r) tali che i numeri $N\xi_r$, $N\eta_{1,r}, \dots, N\eta_{k,r}$ siano algebrici interi, ed essi e tutti i loro coniugati abbiano modulo $< L$ $(r = 1, 2, 3, \dots)$. Allora dei k numeri $\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$ $(\xi \neq 0, \xi \neq 1)$ uno almeno è trascendente quando sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

1°) i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti almeno fino alla quota

$$(- g_r^2 \log \delta_r)^{\frac{1}{2k+1}} \qquad (r = 1, 2, 3, \dots);$$

2°) esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ per il quale è

$$g_r^{4 + \frac{3}{k} + \varepsilon} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \qquad \text{per } r \to + \infty.$$

III). — Supponiamo che ξ_r sia algebrico di grado g_r $(r = 1, 2, 3, \dots)$ e che i $k + 1$ numeri $1, \eta_1, \dots, \eta_k$ siano algebrici linearmente indipendenti.

Sia $\xi_r \to \xi$, $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$, $\delta_r = |\xi_r - \xi|$, $x_r \xi_r$ intero, $X_r = \mathrm{Max}(|\overline{\xi_r}|)$.

Allora dei k numeri $\xi^{\eta_1}, \dots, \xi^{\eta_k}$ uno almeno è trascendente quando è soddisfatta la condizione seguente:

A) esistono due numeri reali ρ, σ con $0 < \rho < \rho + \sigma < 1$ tali che per $\theta = 1 + \frac{1}{k} + 2\rho$ e $r \to +\infty$ risulti

$$g_r^{\frac{1}{k}+\frac{\theta}{\rho}} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \qquad g_r^{\frac{1}{k}+\frac{\theta}{\sigma}} \log^{\frac{\theta}{\sigma}}(ex_rX_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Questa proposizione non cessa di valere se alla condizione A) si sostituisce la seguente (più restrittiva):

B) $g_r = O(1)$ ed esiste un numero reale $\varepsilon > 0$, tale che per $r \to +\infty$ risulti

$$x_rX_r = O\left(e^{\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{k-\varepsilon}{k+1}}}\right).$$

IV). — Supponiamo che i numeri ξ, $\eta_1, \dots, \eta_k$ $(k \geq 1)$ siano algebrici e che i $k+1$ numeri $1, \eta_1, \dots, \eta_k$ siano linearmente indipendenti.

Siano $\xi', \eta_1', \dots, \eta_k'$ $k+1$ numeri reali e $\xi\xi' \neq 0$, $\xi\xi' \neq 1$.

Allora dei k numeri $(\xi\xi')^{\eta_1\eta_1'}, \dots, (\xi\xi')^{\eta_k\eta_k'}$ uno almeno è trascendente quando esistono un numero reale $\varepsilon > 0$ e $k+1$ successioni di numeri razionali

$$\frac{p_r}{q_r} \to \xi', \quad \frac{p_{1,r}}{q_r} \to \eta_1', \dots, \quad \frac{p_{k,r}}{q_r} \to \eta_k', \qquad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

convergenti a $\xi', \eta_1', \dots, \eta_k'$ in guisa da avere

$$\left|\xi' - \frac{p_r}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r^{\omega}}, \quad \left|\eta_1' - \frac{p_{1,r}}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r^{\omega}}, \dots, \quad \left|\eta_k' - \frac{p_{k,r}}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r^{\omega}},$$

$$\left(\omega = (\log q_r)^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon}\right).$$

Per $k = 1$ risulta $\omega = \log^{4+\varepsilon} q_r$ e il numero $(\xi\xi')^{\eta\eta'}$ è trascendente non appena sia soddisfatta la condizione enunciata.

V). — Siano ξ, η due numeri algebrici, η irrazionale.

1°) Se $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$, allora ξ^{η} è trascendente (A. GELFOND).

2°) Se $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$ e nello sviluppo in frazione continua di un numero reale irrazionale α esistono infinite ridotte $\frac{p_r}{q_r}$ per le quali

$$\left|\alpha - \frac{p_r}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r^{\omega}}, \qquad (\omega = \log^{2+\varepsilon} q_r, \ \varepsilon > 0 \text{ indipendente da } r)$$

allora $\xi^{\eta\alpha}$ è trascendente.

3°) Se $\xi\alpha \neq 0$, $\xi\alpha \neq 1$ e nello sviluppo di α esistono infinite ridotte $\frac{p_r}{q_r}$ per le quali

$$\left|\alpha - \frac{p_r}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r^{\tau}}, \quad (\tau = \log^{1+\varepsilon} q_r, \ \varepsilon > 0 \text{ indipendente da } r)$$

allora $(\xi\alpha)^{\eta}$ è trascendente.

Questa ultima proposizione ci mostra che i risultati conseguiti ci forniscono infiniti numeri trascendenti del tipo ζ^{γ} e del tipo γ^{ζ} essendo ζ algebrico; e tale infinità ha la potenza del continuo.