
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: N. Kryloff - N. Bogoliuboff (G. Lampariello)

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.1, p. 27-31.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_27_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_27_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

N. KRYLOFF - N. BOGOLIUBOFF: *L'application des méthodes de la Mécanique non linéaire à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe et à la théorie des perturbations des systèmes canoniques*. Éd. technico-théoriques d'État, Léninegrad; Mém. n. 4 publié par l'Ac. des Sc. d'Ukraine, Inst. de Mécanique des constructions, Kieff, 1934.

Lo studio delle oscillazioni imposto fin qui all'analisi matematica dalle scienze fisiche e tecniche è stato quasi sempre opportunamente schematizzato in modo da condurre ad equazioni differenziali *lineari* con parametri indipendenti dal tempo. Si hanno così le cosiddette *oscillazioni lineari*.

La ragione di ciò è principalmente dovuta al fatto che, allo stato attuale delle scienze matematiche, le equazioni differenziali lineari sono le meglio studiate anche dal punto di vista delle applicazioni pratiche.

Ma nelle recenti ricerche che costituiscono la moderna *tecnica delle vibrazioni* si è riconosciuto che la linearità delle oscillazioni è una schematizzazione troppo semplicista.

Ed invero nuovi fenomeni impongono lo studio di oscillazioni non aventi carattere lineare. Il bisogno di istituire nuovi metodi per lo studio generale delle oscillazioni non è però solo di questi tempi, perchè esso è sorto già quando si è fondata la teoria matematica del movimento degli astri.

L'opera immortale del POINCARÉ e di LIAPOUNOFF ha gettato viva luce sull'arduo problema della caratterizzazione analitica rigorosa delle perturbazioni planetarie.

Ma i metodi elaborati, riguardanti specialmente le oscillazioni intorno a moti periodici, affrontano solo un aspetto particolare del problema.

Recentemente il fisico olandese VAN DER POL è stato condotto allo studio di un nuovo fenomeno nel campo della radiotecnica: *la demoltiplicazione della frequenza nei sistemi di rilassamento*.

Questo consiste in ciò: che sotto l'influenza di una forza esterna periodica di frequenza α è possibile eccitare nel sistema considerato oscillazioni di cui le frequenze sono sottomultipli di α . Questo fenomeno, che si verifica anche nei sistemi di THOMSON (nei quali le resistenze ohmiche sono trascurabili), ha dato luogo a numerose ricerche, perseguite specialmente in Francia e in Russia. Esse hanno di mira l'elaborazione di metodi radiotecnici rigorosi dal punto di vista matematico ed in particolare tendono a perfezionare il funzionamento dell'oscillatore a lampada.

Ora le oscillazioni che si verificano nei fenomeni radiotecnici hanno carattere quasi periodico nel senso che esse ammettono più frequenze tra loro indipendenti e i contributi apportati fin qui alla teoria delle funzioni quasi periodiche non sembrano sufficienti per le nuove esigenze della scienza.

I proff. N. KRYLOFF e N. BOGOLIUBOFF hanno per primi istituite ricerche matematiche generali per la discussione analitica dei nuovi fenomeni. I loro risultati si applicano non solo alla radiotecnica, ma allo studio di tutti quei fenomeni in cui intervengono oscillazioni non lineari e costituiscono una nuova teoria che può ben a ragione chiamarsi, con gli Autori, *meccanica non lineare*.

I procedimenti generali di questa nuova teoria non sono esposti, per quanto ci consta, in forma matematica indipendente dai problemi concreti ai quali si applicano.

Noi qui volgeremo la nostra attenzione alle applicazioni che gli Autori fanno alla teoria delle perturbazioni dei sistemi canonici avendo di mira in particolar modo il fondamento matematico del metodo usato.

Si consideri un sistema ad un sol grado di libertà e siano

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

le equazioni canoniche corrispondenti.

Supponiamo che la funzione di HAMILTON $H(p, q, t)$ si possa decomporre in una somma del tipo

$$H_0(p, q) + H_1(p, q, \alpha t),$$

tale che H_0 sia indipendente dal tempo ed H_1 sia periodica in t .

Conveniamo di chiamare *non perturbato* il sistema di caratteristica H_0 e funzione *perturbatrice* la H_1 .

Nella teoria delle perturbazioni, quando si abbia in vista il calcolo delle diseguaglianze del prim'ordine si suppone che il rapporto $\frac{H_1}{H_0}$ si possa riguardare come una quantità del prim'ordine.

Nel caso generale in cui non è lecito trattare come infinitesima la H_1 di fronte ad H_0 , gli Autori sviluppano un metodo per la ricerca di espressioni formali delle funzioni incognite p, q , le quali possano rendere servigi analoghi agli sviluppi in serie che usano gli astronomi nei loro calcoli.

Il metodo è basato sulla considerazione preliminare del sistema non perturbato, il quale è integrabile elementarmente.

Si ammetta la periodicità delle soluzioni del sistema non perturbato (¹). Se si indica con E l'energia totale di questo, si dimostra l'esistenza di due certe variabili J, w canoniche al pari di p, q tali che la H_0 risulti funzione della sola J .

La prima variabile J (*Wirkungsvariable*), funzione invertibile di E , è l'integrale ciclico esteso ad una traiettoria (del piano delle fasi)

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq.$$

La seconda variabile w (*Winkelvariable*) ha carattere ciclico e non è che la fase all'istante t nel generico moto non perturbato $w = \omega t + z_0$.

La funzione caratteristica H espressa nelle nuove variabili è allora

$$H = H_0(J) + \mu \Gamma(J, w, \alpha t),$$

dove $\Gamma(J, w, \alpha t)$ è periodica in w, t e μ è un parametro ausiliario destinato a rendere più comodi gli apprezzamenti dell'ordine di grandezza.

Per il valore $\mu = 1$, si ha il trasformato del sistema originario (1).

Il sistema canonico da studiare è dunque

$$(2) \quad \frac{dJ}{dt} = -\mu \frac{\partial \Gamma}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dH_0}{dJ} + \mu \frac{\partial \Gamma}{\partial J}.$$

Poichè interessa analizzare il sistema per il particolare valore $\mu = 1$ del parametro, gli Autori sostituiscono alla derivata $\frac{dH_0}{dJ}$ l'espressione

$$\omega(1 - \mu) + \mu \frac{dH_0}{dJ} \equiv \omega + \mu \frac{dF}{dJ},$$

(¹) Se le curve $H_0 = E$ del piano delle fasi p, q sono *chiuse* e *prive di punti multipli*, le soluzioni del sistema canonico di caratteristica H_0 sono *periodiche*.

Cfr. G. LAMPARIELLO, *Sulla quadratura che effettua l'integrazione dei sistemi canonici con un grado di libertà*. « Rend. Lincei », pp. 74-78, 1933.

essendo

$$\frac{dF}{dJ} = \frac{dH_0}{dJ} - \omega.$$

Se allora si pone

$$L(J, v, \alpha t) = V(J, v, \alpha t) + F(J),$$

il sistema differenziale diventa

$$(3) \quad \frac{dJ}{dt} = -\mu \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = \omega + \mu \frac{\partial L}{\partial J},$$

e va notato che per $\mu = 1$ questo riducesi al sistema (2).

Dopo ciò si può ricondursi ad un sistema di equazioni alle derivate parziali che si presta bene all'integrazione per approssimazioni successive.

Basta osservare che se le due funzioni

$$x(t, \tau, \mu), \quad y(t, \tau, \mu)$$

soddisfano al sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} + \mu v \frac{\partial x}{\partial \tau} = -\mu \frac{\partial L(x, y, \alpha t)}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \mu v \frac{\partial y}{\partial \tau} = \omega + \mu \frac{\partial L(x, y, \alpha t)}{\partial x}, \end{cases}$$

dove

$$v = 1 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \dots$$

(essendo $v_1, v_2, v_3, \dots$ da determinarsi opportunamente), le funzioni

$$J = (t, \mu v t, \mu), \quad v = y(t, \mu v t, \mu),$$

soddisfano al sistema (3).

Per il calcolo delle x, y , gli Autori applicano il metodo dello sviluppo in serie ponendo nelle (4) le serie formali

$$\begin{cases} x = \sum_0^\infty \mu^n x_n(t, \tau), \\ y = \sum_0^\infty \mu^n y_n(t, \tau). \end{cases}$$

Si ha così un procedimento di integrazioni successive per il calcolo delle funzioni x_n, y_n ; $n = 0, 1, 2, \dots$

Per l'analisi degli sviluppi è necessario distinguere due casi secondo che il rapporto $\frac{\omega}{\alpha}$ è irrazionale o razionale.

Nel primo caso si trova che le espressioni formali di p, q sono quasi periodiche in t con due frequenze principali ω^*, α .

La ω^* , che può dirsi la *frequenza propria* del sistema, riducesi ad ω in assenza di perturbazione. La α è la cosiddetta *frequenza interna* del sistema.

A dire il vero gli sviluppi formali non sono convergenti in generale, ma gli Autori ne traggono egualmente partito (come del resto fanno gli astronomi con le serie di LINDSTEDT per il calcolo delle perturbazioni) quando la frequenza propria ω^* non si trovi in un rapporto razionale $\frac{m}{n}$ (essendo m, n relativamente piccoli) con la frequenza interna α .

Particolare attenzione gli Autori rivolgono al caso in cui sia $\omega = \frac{m}{n} \alpha$. Si produce allora il fenomeno di risonanza non lineare il quale dà luogo tra l'altro alla sincronizzazione delle oscillazioni e alla demoltiplicazione della frequenza.

Uno studio approfondito di questi fenomeni è fatto per i sistemi conservativi ad un grado di libertà specialmente nel caso, importante per la pratica, che la funzione perturbatrice sia della forma $H_1(p, q) \sin \alpha t$.

Si tratta come si vede di un campo generale di ricerche di altissimo interesse teorico e pratico che era doveroso segnalare agli studiosi italiani.

G. LAMPARIELLO