Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni

* D. Hilbert und P. Bernays: Grundlagen der Mathematik (B. Levi)
* A. Heyting: Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie (B. Levi)
* Alte Probleme-Neue Lösungen in den exakten Wissenschaften (B. Levi)
* H. Liebmann: Synthetische Geometrie (Beniamino Segre)
* C. Juel: Vorlesungen über projective Geometrie (Beniamino Segre)
* Webér-Wellstein: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. I. Arithmetik, Algebra und Analysis,
* V. Volterra: Équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions
* K. H. Grossmann: Elemente der Elementaren Mechanik. 1 Teil

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.1, p. 32–45.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_32_0>

RECENSIONI

D. HILBERT und P. BERNAYS: *Grundlagen der Mathematik*. 1er Bd. Berlin, Springer, 1934; in 8°, pp. 471+XII. RM. 36 (geb. RM. 37,50).

Da alcuni decenni DAVID HILBERT persegue il problema di dimostrare la non-contradditorietà della matematica. L' HILBERT ha dato nome di *metamatematica* a questo ordine di ricerche, che tende a mettere in luce l' intimo fondamento logico dei ragionamenti matematici: il capitolo più essenziale di esso sarebbe la *teoria della dimostrazione (Beweistheorie)*. L' Opera di cui è ora apparso il primo volume ha per scopo di coordinare in modo definitivo i risultati ottenuti finora dall' HILBERT e da qualcuno dei suoi più prossimi allievi, di cui primo e assiduo è il BERNAYS. Forse la preoccupazione della completezza, di nulla lasciare affidato al libero intuito del lettore, e quindi anche di illustrare largamente le idee generali mediante esemplificazioni, è causa di una prolissità che non possiamo esimerci dal rilevare e che rende la lettura del libro talora alquanto faticosa. Il primo capitolo (o §. come gli A.A. preferiscono) introduce il lettore nel *problema della compatibilità (Widerspruchfreiheit) dei postulati* (1): si ricorda che metodo usato molto frequentemente per la dimostrazione della compatibilità (2) di un sistema di postulati è quello della *interpretazione* di detti postulati mediante relazioni effettivamente costruibili fra elementi di un sistema di enti noti: si richiamano, come esempio, *formalizzandoli* (e cioè riducendoli a formole logiche colleganti simboli di elementi e di relazioni, spogliati di interpretazione intuitiva), i postulati posti dall' HILBERT a base della geometria elementare. Il dominio in cui avviene abitualmente, per parte dei logici-matematici, questa interpretazione, è quello dei numeri reali.

(1) *Postulati* secondo la terminologia abituale in Italia; *assiomi* secondo la terminologia dello HILBERT.

(2) E parimenti di altre meno essenziali caratteristiche, ad es. l' *indipendenza*.

Il procedimento non può però avere applicazione illimitata: precisamente occorre distinguere secondochè le relazioni stabilite dal sistema di postulati che si esamina possono verificarsi mediante un numero finito di elementi ovvero non: nel primo caso la prova della compatibilità può avvenire con semplice metodo combinatorio, come immediata validità *(Allgemeingültigkeit)*: nel secondo caso è necessario supporre la compatibilità a priori dei postulati che definiscono il dominio infinito sul quale avviene l'interpretazione e da questa petizione di principio non si può uscire che sostituendo alla domanda di validità quella di non-contradditorietà *(Widerspruchsfreiheit)* e cioè col ricercare una dimostrazione della impossibilità di dedurre, dal detto sistema di postulati e da una qualsiasi proposizione A, la negazione di questa « non-A ».

Avendo ricondotto, mediante il metodo della interpretazione, il problema della non-contradditorietà della matematica a quello analogo per l'aritmetica, i nostri AA. passano in un § 2 ad esaminare quanto di questa si possa far dipendere da un *finite Schliessen*, « deduzione finita », ragionamento in dominio finito: ci si riattacca ad un punto di vista più volte esposto dall'HILBERT, secondo il quale alla teoria dei « numeri » si sostituirebbe una *teoria di cifre*, queste essendo i segni risultanti da una successiva giustaposizione di unità. Dobbiamo dichiarare la nostra impressione che questo *finite Schliessen* contenga un grave equivoco: in più luoghi del libro noi troviamo scritture contenenti puntini per rappresentare termini, in numero indeterminato, che non si scrivono: così « 1, 2,..., k », oppure « $\mathfrak{A}(1)$ & $\mathfrak{A}(2)$ & ... & $\mathfrak{A}(k)$ ». Sono scritture che noi intendiamo benissimo, che noi usiamo continuamente, ma che hanno un valore convenzionale, ma non logico: *sui punti non si ragiona* e, notoriamente, i punti stanno a sostituire definizioni e ragionamenti sottintesi ma esattamente e sistematicamente esprimibili mediante applicazione del postulato di induzione matematica. Appartiene oppur no questo postulato alla « deduzione finita »? Una risposta tentano pure di darcela i nostri AA., parlandoci di « induzione completa in senso intuitivo » (p. 23); si tratterebbe di questo: si può affermare che una proposizione è vera per *ogni cifra* se essa è vera per la cifra 1 e se, ammesso che essa sia vera per una cifra (effettivamente formata per giustaposizione di unità) essa risulta vera per la cifra che se ne ottiene per aggiunzione d'una nuova unità. « Non si tratta — affermano gli AA. — di un nuovo principio, ma di una conseguenza della concreta costruzione delle cifre ». A noi pare che nulla distingua questa proposizione dal postulato d'induzione nella definizione assiomatica dei numeri naturali secondo PEANO. Ogni affermaziene d'indole generale, e cioè valida per una varietà *illimitata* (¹) di casi, per tutti i valori di una lettera f o ʒ rappresentante una cifra, è logicamente possibile soltanto in virtù del postulato d'induzione.

Questa obiezione pesa disgraziatamente non soltanto sopra questo § destinato esclusivamente al « finite Schliessen », ma sopra una estensione troppo notevole del libro: negli argomenti matematici essa si applica, per es., ai ripetuti ragionamenti regressivi del § 6, ed alla ivi tentata dimostrazione della non-contradditorietà di aggregati infiniti: negli argomenti più puramente logici si applica alla nozione di « formola identica *k-zahlig* » del § 4 ed in altri luoghi analoghi. Si potrebbe pensare che tutto questo possa, se mai, influire sul giudizio che si deve dare dell'ordine della materia, non sulle conclusioni perchè, se si assumono per buone le dimostrazioni di non-contradditorietà esposte dagli AA., colla sola avvertenza che in esse si applica una proposizione di più che non si dica, deve allora risultare l'assunto degli AA. sovrabbondantemente provato, poichè ne risulta che non solo sono fra loro compatibili le proposizioni messe in evidenza, ma ben anche queste insieme colla proposizione sottaciuta. Ciò non è nel caso nostro, in cui la proposizione da aggiungere è il postulato d'induzione, perchè non può questo essere enunciato se non presupponendo l'aggregato dei numeri naturali, quell'aggregato che i nostri AA. vorrebbero in certo modo gradualmente precisare con successive prove di compatibilità. È cosa che non sfugge agli AA., i quali però credono di poter distinguere fra *cifre* e *numeri*: le prime costituenti un aggregato in via di formazione, pel quale l'induzione non è postulato: i secondi concepiti come aggregato globale pel quale invece il postulato deve essere esplicitamente enunciato.

Molte cose contiene d'altronde il volume in esame, le quali possono essere valutate in sè, indipendentemente dal programma finale dell'opera: e citiamo ad es. la varia elaborazione dei postu-

(¹) Diciamo *illimitata* per porci quanto possibile nell'ordine di idee degli AA. ed evitare, nel parlare di « deduzione finita » la parola « infinito »: se si vuole, la costruzione concreta di cifre è illimitata; non può essere infinita perchè l'effettuazione di infinite operazioni esce dalle nostre possibilità: ma la distinzione è d'ordine sperimentale e non logico: ogni successione sperimentalmente illimitata è logicamente infinita: precisamente non è possibile di affermare logicamente (e non come semplice supposizione induttiva nel senso delle scienze sperimentali) una illimitatezza nell'ordine concreto senza possedere in precedenza la nozione dell'infinito costituita dal postulato d'induzione.

lati dei numeri naturali, nella quale tuttavia non ci pare sia posta nella sua chiara luce l'opera fondamentale e definitiva del nostro Peano (¹): in un primo sistema di postulati (sistema (A)) si assume come idea primitiva (oltre a quelle di Peano: « numero » « zero » « successivo ») la relazione $<$. Naturalmente deve, in corrispondenza, crescere il numero dei postulati: si dovrebbe osservare che, in una buona struttura logica, non è mal assumere come primitiva una nozione definibile: la risposta, qui forse non portata sufficientemente in luce, sta in una reale difficoltà di cui tosto diremo; manca però nel sistema (A) il postulato d'induzione. Nel sistema (B) è introdotto questo postulato ed è portata qualche modificazione formale agli altri: attribuiamo a dimenticanza che [illegible] sia scomparso il post $\overline{a < 0}$ (nessun numero è minore di 0). Il sistema (C) contiene una interessante osservazione circa la possibilità di dare ai postulati sopra indicati con (P_1) e (P_2) [1] e a quelli relativi alla relazione $<$ la forma esistenziale, relativa ad una certa funzione δ. Infine i sistemi (D) e (Z) riflettono la seguente osservazione, in verità sostanziale riguardo alla logica teorica: che quando, col Dedekind e col Peano, una operazione aritmetica è definita per induzione (tali le operazioni $+$ e $\times$) il segno d'operazione compare effettivamente come idea primitiva, perchè non è possibile « formalizzare » la definizione senza far uso del segno medesimo [2]. L'osservazione ha d'altronde applicazione più ampia. È da notare che l'assunzione del segno $<$ come idea primitiva, che non è giustifieata quando si tratta della definizione della classe dei numeri naturali, lo diviene parzialmente dopo questa osservazione, in quanto esso non può effettivamente definirsi che mediante un altro segno primitivo, il segno $+$.

Non possiamo essere completi nell'elencare altri particolari riferentisi alla minuta analisi dei postulati dell'aritmetica (per es.

(¹) Gli AA. chiamano *postulati di Peano* (P_1) e (P_2) rispettivamente « zero non è successivo di alcun numero » e « uno stesso numero non è successivo a due differenti »: ci pare assai poco, perchè il valore matematico e filosofico dei cinque postulati posti dal Peano a fondamento dell'aritmetica sta precisamente nell'insieme di essi ed in particolare nella sicura visione della natura aritmetica e non logica del postulato d'induzione e della necessità di assumere come idea primitiva la classe globale dei numeri naturali; e questo precisamente pare sfugga completamente agli AA., per es. nella discussione che dell'assiomatica dei numeri interi del Peano essi fanno alla p. 220.

(²) I sistemi (Z*), (Z**) sono modificazioni esclusivameute formali di (Z): tanto esclusivamente formali che non sappiamo valutare le ragioni per porli in evidenza.

quello spezzamento del postulato d'induzione che dà luogo al principio del minimo intero): faremo invece ancora un cenno al contenuto dei §§ 3, 4, 5 sui quali, per ragione dell'argomento, abbiamo sorvolato. Si tratta in essi della logica teorica o logica matematica. L'argomento era già stato trattato, secondo le vedute dell'HILBERT, pochi anni addietro nel volumetto di HILBERT e ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen Logik* (Springer, 1928). Le due trattazioni, pur con molti e necessari punti di contatto, differiscono fra loro notevolmente per il vario sviluppo e la varia evidenza data ad alcuni argomenti: citiamo la presentazione delle operazioni elementari sulle proposizioni come *Wahrheitfunctionen* (funzioni a due soli valori — *vero* e *falso* — di variabili capaci pure di questi due soli valori), il calcolo dei predicati e l'analisi di quel particolare predicato che è il rapporto d'identità.

Un'osservazione ho già avuto occasione di fare altrove e potrebbe essere qui ripetuta: è quella di un certo misconoscimento dell'opera logico-matematica del PEANO e della sua scuola: il simbolismo del PEANO, che per molti riguardi si può considerare perfetto, è completamente ignorato e sostituito con altro, meno adatto in generale ad una completa scrittura ideografica. Dobbiamo però rilevare, a parziale giustificazione, che diversa è evidentemente l'idea direttrice degli AA.: essi stessi non perseguono una ideografia tendente a qualcosa di sistematico e definitivo, ma procedono per successiva sostituzione di uno ad altro simbolismo (per es. di relazioni implicite ad altre esplicitamente risolute) di cui, appunto in vista della equivalenza, non sappiamo intuire lo scopo.

B. LEVI

A. HEYTING: *Mathematische Grundlagenforschung Intuitionismus-Beweistheorie.* (« Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete », III Bd., 4 Heft). Berlin, Springer, 1934, pp. 73+IV. RM. 8,75.

Se v'ha un argomento matematico in cui l'indirizzo e la forma della ricerca porta nettamente un'impronta nazionale, questo è certamente la logica-matematica. È vanto italiano l'opera del PEANO la quale, come altrove ho osservato, si lascia indietro per certi riguardi, pel simbolismo ideografico, ad esempio, molto di ciò che da altri è stato fatto anche di poi: ma il pensiero del PEANO, ed anche quello dei suoi continuatori, si rivolge prevalentemente all'analisi del ragionamento logico, delle sue regole e delle sue forme, come dato di fatto; non diversamente potrebbe dirsi, che come i greci considerarono la geometria o i matematici del rinascimento l'analisi. L'indirizzo tedesco tende ad entrare in una analisi più filosofica, come già si vede in GRASSMANN e in DEDEKIND e poi in FREGE, pur prossimi nel tempo al PEANO e come più nettamente si dimostra negli svolgimenti moderni: e perciò anche talvolta più opinabile. È noto che attualmente si oppongono fra loro la veduta intuizionista, di cui l'A. del volumetto assegna il punto di partenza nell'opera del POINCARÉ e che riconosce come capo il BROUWER e quella cui l'HILBERT ha dato nome di metamatematica. Il nostro personale punto di vista è che pel matematico l'opposizione non sia o non dovrebbe essere: molto hanno dato e molto ancora possono dare i vincoli dell'intuizionismo come stimolo ad una più minuta analisi delle conoscenze matematiche senza che si debba concludere, come fanno i suoi propugnatori, che sia da mettere in mora larga parte della matematica tradizionale che a questi vincoli sfugge; nè riteniamo che il formalismo incluso nell'*Entscheidungsproblem* possa risolvere per intero il problema dei fondamenti. Nel presente opuscolo A. HEYTING impernia sul contrasto fra intuizionismo e metamatematica una esposizione delle correnti odierne relative ai fondamenti della matematica; esposizione chiara, interessante, ricca d'informazione bibliografica: se ci dovessimo limitare alla prima parte del titolo, dovremmo obbiettare che esso si occupi quasi soltanto di svolgimenti appartenenti a paesi di lingua tedesca, anche se non vi si trascuri di ricercare una origine del movimento negli autori francesi; ma ciò, come fu detto, si può giustificare con una limitazione di argomento indicata di fatto come sottotitolo; esposizione d'informazione e d'orientamento, non di sviluppi teorici che non sarebbero stati concessi dalla ristrettezza dello spazio (l'A. stesso chiama spesso ii suo lavoro *Bericht* e *Artikel*): qua e là ci è parso che qualche interpretazione e qualche insistenza porti il segno di preferenze intuizioniste dell'A..

B. LEVI

Alte Probleme–Neue Lösungen in den exakten Wissenschaften. — Fünf Wiener Vorträge von MENGER, THIRRING, MARK, SCHEMINZKY, † HAHN (Leipzig u. Wien, F. Deuticke, 1934, p. 122, M. 3,60.

Il volumetto riproduce un ciclo di cinque conferenze di volgarizzazione scientifica tenute sotto la presidenza del prof. SCHWEIDLER nell'Istituto di Fisica dell'Università di Vienna, e fa simmetria a quello di origine analoga «*Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften*» che abbiamo recensito l'anno passato: i

« problemi vecchi » sono la quadratura del cerchio (KARL MENGER), il volo intersiderale (HANS THIRRING), la trasformabilità degli elementi (HERMANN MARK), la produzione artificiale della vita (FERDINAND SCHEMINZKY), l'infinito (HANS HAHN) e sono trattati con brio e con gusto e ricchezza di notizie.

Il matematico intuisce senz'altro il contenuto possibile del primo articolo, il quale però, nel suo effettivo svolgimento, è riuscito molto più generico di quanto il titolo dica, mentre dell'argomento specifico indicato nel titolo dice forse meno di quanto si potrebbe: funge in parte come introduzione con uno sguardo generale sull'indirizzo del volume, dà alcune notizie sulla quadrabilità delle aree, sulla risolvibilità di problemi geometrici con riga e compasso, sul calcolo di π, sulle nozioni di irrazionalità e trascendenza dei numeri, sulla misura degli aggregati e, pur non trattenendosi, per non scendere a particolari tecnici, sulla vera « nuova soluzione » del problema della quadratura del cerchio, fornisce notizia di risultati recentissimi sulla trascendenza della funzione esponenziale. Anche l'ultimo articolo *(Gibt es Unendliches?)* dell'HAHN, morto nel luglio durante la stampa del libro, si presenta in massima come un interessante coordinamento di notizie prevalentemente note a chi abbia cultura matematica: dal quale però l'A. prende occasione per dire qualche parola critica più personale sopra l'essenza dei tre punti di vista: realistico intuizionistico e logistico, nella filosofia della matematica, pronunciandosi infine risolutamente in favore dell'ultimo.

Quali sono le « nuove soluzioni » che la scienza moderna offre ai tre problemi utopistici trattati nelle altre tre conferenze? Ancora una volta, e nonostante gli immensi progressi della fisica, della chimica, della tecnica, esse si riducono alla dimostrazione dell'utopia. Così la chiara e acuta analisi del THIRRING porta alla conclusione che il solo mezzo attualmente immaginabile per uscire dal predominio della gravità è quello del motore a razzo, ma questo imporrebbe, per sollevare il peso utile di una tonnellata, di trasportarne 400 di esplosivo per fare un giro intorno alla luna! non sarebbe invece un ostacolo la temperatura dello spazio. Così il MARK ci fa notare che se la fisica moderna è riuscita finalmente alla trasmutazione degli elementi, non possiamo però dire che siano oro nel senso volgare e commerciale i nuclei, privi della corona d'elettroni, che rivela la camera di Wilson; e qualora lo possano essere, la produzione d'un grammo d'oro richiederebbe, nella migliore ipotesi, 30.000 anni con 400 milioni di spesa! Fortunatamente con mezzi più pratici, sebbene ancora assai laboriosi, la chimica moderna è riuscita a porsi in concorrenza colla natura per fornirci prodotti utili che fino a tempi recenti parvero insostituibili. Ed infine il SCHEMINZKY ci mostra come con vari artifizi noi possiamo riprodurre nell'inorganico molte apparenze caratteristiche della vita: forme, mobilità, accrescimento, segmentazione,...; ma possiamo noi credere che, quand'anche potessimo riunire nella stessa struttura materiale tutti questi attributi (nel modo e nelle forme attuali) noi avremmo realizzata la vita? Il SCHEMINZKY non si pronuncia recisamente poichè osserva che manca in ultimo una definizione esatta della vita: a noi pare che certi tentativi, come ad es. le deposizioni in seno a cellule del TRAUBE, siano ancora troppo grossolani perchè si possa concedere il dubbio.

Notevole e interessante la bibliografia che accompagna ciascuna conferenza. B. LEVI

H. LIEBMANN: *Synthetische Geometrie*; Leipzig, Teubner, 1934 (« Math. Leitfäden », Bd. 40).

Questo volumetto perviene rapidamente ai punti salienti della Geometria proiettiva *(proiettività fra forme di 1ª specie, coniche e fasci di coniche, collineazioni piane, schiere rigate)*, con procedimento assiomatico interessante, seppure sostanzialmente noto. L'*indirizzo purista* è qui unito alla costante preoccupazione di *evitare per quanto possibile il postulato della continuità*, sostituendolo con opportuni assiomi, concernenti essenzialmente le proprietà di simmetria dei sei vertici di un esagono di PAPPO–PASCAL; ciò permette d'introdurre le *coniche* come luoghi dei punti del piano che con cinque punti assegnati determinano un esagono di PASCAL, e di dedurne assai semplicemente la teoria delle *proiettività fra forme di 1ª specie*.

Per tale via — che talvolta forzatamente si discosta un po' dall'intuizione — vengono a risaltare nitidamente le dipendenze del *teorema fondamentale* della Geometria proiettiva e dei *teoremi di* DESARGUES, PASCAL e BRIANCHON dagli assiomi ammessi, nonchè i loro mutui legami; e vanno segnalate, a questo riguardo, alcune considerazioni dovute a M. STECK. Riceve invece scarso rilievo il *principio di dualità*, il quale è ottenuto (nel piano) solo come conseguenza della teoria della polarità rispetto ad una conica.

Sono poi da notare gli accenni alle *geometrie finite* ed ai risultati di FANO, MOORE, VEBLEN su tale argomento [1], la dimostrazione

[1] Relativamente al quale manca però ogni indicazione concernente le ricerche, in particolare anteriori, di B. LEVI.

elementare dei *teoremi di chiusura* di PONCELET, e vari sviluppi relativi alle *configurazioni.*

La trattazione — nitida benchè piuttosto schematica, ed essenzialmente sintetica — lascia del tutto in disparte le proprietà metriche, ed è in qualche punto illustrata da argomentazioni analitiche, connesse al modello aritmetico della Geometria dato da HILBERT. Vi sono inoltre pregevoli indicazioni storiche e bibliografiche, indici minuziosi e numerose figure.

BENIAMINO SEGRE

C. JUEL: *Vorlesungen über projective Geometrie*; Berlin, Springer, 1934 (« Die Grundlehren der math. Wiss. », Bd. 42).

Il JUEL è stato, verso la fine del secolo scorso, uno dei principali continuatori dell'opera geometrica dello STAUDT; e la sua « Habilitationschrift » — che risale esattamente a 50 anni fa — ha recato contributi importanti alla Geometria proiettiva complessa. Tale lavoro riceve in questo Trattato un notevole sviluppo ed una sistemazione didattica pregevole, mercè una profonda elaborazione, frutto di tanti anni d'insegnamento. Un po' menomato dal tempo, riesce invece l'interesse scientifico del libro: tanto più che questo si occupa — da un punto di vista piuttosto elementare — di questioni sostanzialmente note, senza in generale tener conto dell'opera di altri AA., e con un'eccessiva parsimonia di citazioni (1).

La trattazione ha carattere eminentemente sintetico, e possiede doti di chiarezza, rigore, eleganza. Essa presuppone conosciute al Lettore solo le principali nozioni di Geometria proiettiva nel campo reale; nozioni che, d'altronde, qui trovansi — rapidamente richiamate — in un'apposita Introduzione, insieme ad alcune proposizioni nuove o meno note (che ricevono applicazione in seguito) concernenti le involuzioni.

Nella 1ª delle 4 Parti in cui si divide il volume, si introducono anzitutto gli *elementi imaginari* nello spazio, con un procedimento che in qualche punto semplifica quello originale di STAUDT (così, p. es., le *catene* ed il *senso delle quaterne di punti* vengono dapprima definite sulle rette imaginarie di 2ª specie, l'estensione alle

(1) Così, p. es., non vi è cenno alcuno degli sviluppi che la Geometria proiettiva complessa deve a E. STUDY, J. L. COOLIDGE, E. CARTAN, A. COMESSATTI e F. SEVERI; mentre i fondamentali lavori di CORRADO SEGRE in tale campo, trovansi unicamente citati nella Prefazione (ove a questo A. è erroneamente attribuito il nome di ENRICO!).

altre forme di 1^a specie avvenendo poscia per proiezione e sezione): si passa quindi allo studio delle *proiettività* e delle *antiproiettività fra forme elementari*. Segue il *calcolo colle quaterne*, che permette di esporre gli elementi della *teoria analitica* delle suddette corrispondenze, di introdurre sinteticamente le *coordinate proiettive* nel piano, e di trattare *problemi di 3° e 4° grado*.

La 2^a Parte è dedicata allo studio sintetico delle *proiettività ed antiproiettività fra piani*; studio che anche qui è integrato dalla *trattazione analitica*. Fra le numerose applicazioni delle teorie svolte, segnaliamo solo il seguente risultato: *Assegnati genericamente nello spazio 4 punti imaginari su di un piano imaginario e 4 punti reali pure complanari, il minimo numero di proiezioni centrali successive — mediante le quali si può passare dall'una all'altra quaterna di punti — è 3 o 2, secondochè si esige o meno che i centri di proiezione siano tutti reali.*

La 3^a Parte inquadra — dal punto di vista proiettivo di CAYLEY e KLEIN — le varie *metriche piane* possibili, e stabilisce i fondamenti geometrici e trigonometrici delle *geometrie non euclidee* e della *geometria euclidea*. Sono da rilevare le *considerazioni gruppali* che portano alle metriche suddette, e la semplice esposizione concernente le *affinità circolari*.

L'ultima Parte tratta delle *trasformazioni piane quadratiche* e delle *curve piane algebriche del terzo ordine*, C^3; le prime sono introdotte ed analizzate poggiando su considerazioni relative ai *fasci di proiettività*, e le seconde sono definite mediante la *generazione proiettiva di* CHASLES. Lo studio delle C^3 avviene sempre nel campo complesso per via puramente sintetica, collegandolo con quello delle trasformazioni quadratiche, ed è spinto fino agli elementi della *teoria della polarità* ed alle proprietà più salienti della *configurazione dei flessi*; la deduzione di queste ultime si basa però sull'ammissione che ogni C^3 abbia sempre almeno un flesso, ciò che qui trovasi dimostrato (valendosi di considerazioni di continuità) solo per le C^3 reali. BENIAMINO SEGRE

WEBER–WELLSTEIN: *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Bd. I; *Arithmetik, Algebra und Analysis*, von H. WEBER, *neubearbeitet* von P. EPSTEIN. 5° Auflage, pagg. XI-582. Teubner, Leipzig und Berlin, 1934.

Data la natura di quest'opera, il fatto che in un trentennio essa sia giunta alla sua quinta edizione dimostra il favore con cui essa è stata accolta dal pubblico matematico, favore giustificato dal ricco contenuto di nozioni ampiamente sviluppate e corredate da numerosi ed utili riferimenti. La prima edizione fu pubblicata da H. WEBER nel 1903; riprodotta con lievi modificazioni nella seconda e nella terza, fu notevolmente rielaborata nella quarta (1920) da P. EPSTEIN, che presenta ora la quinta edizione, nuovamente ampliata e modificata specialmente nella parte relativa all'introduzione dei numeri naturali, e corredata di più larghe notizie bibliografiche e storiche, che il crescente interesse per la Storia delle matematiche rende particolarmente opportune.

L'opera è divisa in tre libri: Aritmetica, Algebra, Analisi. Il primo libro, che comprende le undici prime sezioni dell'opera, contiene nella prima l'introduzione dei numeri naturali, totalmente rifatta in confronto delle edizioni precedenti, in cui venivano prese le mosse da un concetto di aggregati finiti, semi-intuitivo e non ben precisato. Nella nuova redazione sono dati, in forma talvolta alquanto concisa, numerosi riferimenti corredati da larga copia di citazioni e di notizie storiche, sulle diverse vie suggerite nei vari tempi e fino all'epoca più recente, per stabilire i principî dell'aritmetica; per lo sviluppo successivo viene prescelto come punto di partenza quello degli aggregati finiti, in cui però si potrebbe desiderare una più rigorosa enunciazione dei postulati necessari allo svolgimento logico delle ulteriori proprietà. Sul citato impiego degli aggregati finiti è fondato lo studio delle prime operazioni (addizione, moltiplicazione) che forma l'oggetto della seconda sezione; la terza tratta della divisione e dei numeri razionali; nella quarta vengono introdotti gl'irrazionali, insieme alle considerazioni che conducono al concetto di limite; anche qui vi è una larga copia di ragguagli storici. La quinta sezione, sulla misura delle grandezze, si giova di considerazioni di indole empirica, dove forse sarebbe stata preferibile la deduzione logica tratta da un appropriato sistema di postulati.

Nelle seguenti sezioni, dalla sesta alla undecima, contenute in questo libro, e chs trattano delle potenze, logaritmi, numeri complessi, calcolo combinatorio, progressioni, congruenze, resti quadratici, forme quadratiche e frazioni continue periodiche, le nozioni sono complete ed egregiamente esposte, anche se il carattere è spesso più di libro di testo che di enciclopedia o di opera di consultazione.

Una analoga osservazione vale anche per il secondo libro (algebra) che contiene le sezioni dodicesima e diciottesima dell'opera, le quali si riferiscono ai seguenti argomenti: equazioni di primo grado e determinanti, equazioni di secondo, terzo e quarto grado; funzioni razionali intere, radici, divisibilità, interpolazione; funzioni simmetriche, gruppi e cenno sulla teoria di GALOIS; risoluzione approssimata, divisione del cerchio, impossibilità della risoluzione per radicali dell'equazione di quinto grado. Oltre alla consueta copiosa raccolta di notizie storiche e bibliografiche, è encomiabile la chiarezza con cui sono esposti gli ultimi argomenti citati, i quali, a dir vero, esorbitano dal consueto campo della matematica elementare. Il terzo libro, dedicato all'Analisi algebrica, è condotto in modo analogo al precedente, assumendo non di rado aspetto di libro di testo. Esso contiene le sezioni dalla diciannovesima alla ventiquattresima dell'opera e si riferisce agli argomenti seguenti: serie, serie di potenze, serie binomiale, esponenziale, serie trigonometriche, numeri di BERNOULLI; logaritmi naturali, serie logaritmica, calcolo di π; formula di STIRLING, costante di EULER-MASCHERONI, trascendenza di e e di π. Notiamo che come pur troppo in molte opere straniere, il nome dell'italiano MASCHERONI non viene ricordato, nonostante la cura posta dagli AA. nei ragguagli storici.

Da questa rapida rassegna si scorge come la ponderosa opera, sebbene dal titolo appaia dedicata alla matematica elementare, tratti di non pochi argomenti che trascendono da quelli detti elementari nel senso scolastico della parola; tuttavia essi sono intimamente legati alle radici della nostra scienza, e ciò giustifica la loro ammissione. A questo punto di vista però, avrebbero potuto pretendere un posto gli elementi dell'analisi infinitesimale: la questione si è effettivamente affacciata anche agli Autori, come appare dalla prefazione alla quarta edizione, ma è stata risolta colla negativa. In complesso non si può non apprezzare il valore dell'opera di WEBER e di EPSTEIN, la somma di lavoro che ha richiesto e la copia di nozioni che fornisce; tanto da fare ritenere che codesta opera non dovrebbe mancare in una biblioteca matematica, per quanto modesta. (*u*)

V. VOLTERRA: *Équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions*, « Annales de l'Institut H. Poincaré », 1934.

Sono le lezioni che l'illustre Autore tenne qualche anno fa all'Istituto H. Poincaré intorno a varie generalizzazioni della teoria delle funzioni e dell'equazioni alle derivate parziali che vi si collegano, raccolte e pubblicate a cura di M. J. PÉRÉS. Esse sono come un compendio delle ricerche già celebri dell'autore sparse in parecchie memorie e in altre sue opere; ma così fatto che le geniali idee si vedono quasi germogliare dal terreno classico e via via allargarsi. e delineare e dominare orizzonti sempre più vasti.

Dalla semplice e nota osservazione che l'equazione di LAPLACE in due dimensioni $\Delta u = 0$ può sostituirsi con un sistema lineare di due equazioni del 1° ordine e viceversa, ecco scaturire alcune belle e importanti estensioni sulla *linearizzazione* di altre equazioni della elettrodinamica e della teoria di DIRAC, che danno luogo a collegamenti nuovi e inaspettati con altri campi dell'analisi.

Questa è come una introduzione per passare poi al concetto di funzioni di linea e allo studio delle loro proprietà fondamentali. In particolare sono esaminate le connessioni di regioni dello spazio in rapporto alla polidromia di coteste funzioni, e poi le proprietà delle funzioni coniugate. Sono soggetti questi che l'A. già espose ampiamente in altre sue opere ormai classiche; e tutti sanno a quante altre ricerche abbian dato luogo.

Segue a questa esposizione l'estensione del concetto di funzione di linea e di funzioni coniugate negli spazi n-dimensionali. L'abilità con cui questa difficile estensione è stata ottenuta è veramente mirabile. Fra l'altro l'A. dimostra la proprietà fondamentale che esiste per ogni ipersuperficie S_n delle coppie di funzioni coniugate d'ordine $r-1$ e $n-r-1$. Così si possono costruire delle funzioni di punto coniugate a delle funzioni di spazi a $n-2$ dimensioni; delle funzioni di linee coniugate a delle funzioni di spazi a $n-3$ dimensioni, ecc..

Questa estensione suggerisce tosto l'estensione del classico concetto di *monogeneità*. L'A. infatti ci arriva con quella sua particolare perspicacia attraverso successive generalizzazioni, introducendo dapprima il concetto di funzioni di linee *isogene* in S_3, poi estendendolo agli spazi n-dimensionali.

Alla raccolta di queste lezioni è unita un'ampia bibliografia, dove son citate le opere di VOLTERRA su questi soggetti e le ricerche di altri autori nello stesso campo e in campi affini.

p. b.

K. H. GROSSMANN: *Elemente der Elementaren Mechanik.* 1 Teil, Preis 3 fr., Verlag, Zürich (1934).

Veramente bello è questo piccolo volume del GROSSMANN, dove l'A. in sole 100 pagine espone la statica nella forma e con le applicazioni più adatte all'aspirante ingegnere. La semplicità, la brevità e la chiarezza sono ottenute con l'impiego costante del calcolo vettoriale assoluto, che l'A. giustamente chiama il *linguaggio naturale della meccanica.* (Peccato ch'Egli persista, come molti altri, ad adoperare il simbolo [**a**, **b**] per il prodotto vettoriale, così incomodo ed illogico; ossia così in contrasto con le regole del calcolo algebrico diventate classiche).

I primi paragrafi (e anche un'appendice alla fine del libro) sono dedicati appunto al calcolo vettoriale e con esso allo sviluppo bene ordinato della teoria delle forze. Seguono le condizioni per l'equilibrio dei sistemi materiali liberi e vincolati, anche nel caso che si tenga conto degli attriti, e il calcolo delle reazioni dei vincoli. Particolare sviluppo è dato allo studio dei corpi aventi un asse fisso o un punto fisso, e all'attrito di rotolamento.

In altri paragrafi è trattato il problema dell'equilibrio delle travi con carico discontinuo e continuo nella forma che riesce più utile al tecnico. E infine c'è un rapido ma sufficiente accenno all'equilibrio delle catenarie.

In sostanza il libro corrisponde pienamente allo scopo di offrire all'aspirante ingegnere le nozioni e i metodi necessari per lo studio dei problemi d'equilibrio che più spesso si presentano nella pratica.

p. b.