Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Arturo Maroni

Sui sistemi algebrici di curve riducibili appartenenti ad una superficie algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.1, p. 4–9.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_1_4_0>

Sui sistemi algebrici di curve riducibili appartenenti ad una superficie algebrica.

Nota di ARTURO MARONI (a Cagliari).

Sunto. - *Si estende ai sistemi algebrici di indice uno (di curve appartenenti ad una superficie algebrica) il classico teorema di* BERTINI, *relativo ai sistemi lineari di curve piane riducibili: e se ne deduce un complemento ad un noto teorema di* ENRIQUES.

1. Sopra una superficie algebrica F, si abbia un sistema algebrico Σ, di ∞^1 curve C, il cui indice sia ν [1].

Supponiamo che la generica curva C sia riducibile, ma escludiamo che abbia una componente fissa.

[1] Tanto qui che nei nn. 2 e 3, supporremo che i sistemi algebrici di cui si tratta siano *irriducibili* (i sistemi, non le curve che li compongono); e inoltre supporremo che la generica curva di ciascuno di tali sistemi non abbia componenti multiple variabili.

Mentre la curva C descrive il sistema Σ, le sue componenti irriducibili descriveranno certi sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_t$, i cui indici indicheremo rispettivamente con $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_t$.

Le componenti irriducibili della curva C, appartenenti al sistema Σ_i ($i = 1, 2, \ldots t$), generano entro Σ_i una serie algebrica γ_i (ogni gruppo della quale è formato dalle curve di Σ_i che appartengono ad una medesima C), il cui indice indicheremo con μ_i. Indicheremo, inoltre, con λ_i il numero delle curve C contenenti come parte un medesimo gruppo delle serie γ_i.

Per un punto generico (¹) P, della superficie F, passano ν_i curve del sistema Σ_i ($i = 1, 2, \ldots t$), ciascuna delle quali appartiene a μ_i gruppi della serie γ_i, e ciascuno di questi gruppi appartiene a sua volta a λ_i curve C: sicchè per P passano $\sum\limits_{i=1}^{t} \lambda_i \mu_i \nu_i$ curve C: e manifestamente non ve ne passano di più. Ne segue che si ha la relazione:

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 + \lambda_2\mu_2\nu_2 + \ldots + \lambda_t\mu_t\nu_t = \nu. \tag{1}$$

Si faccia ora l'ipotesi che il sistema Σ sia di indice $\nu = 1$. In tal caso, poichè i numeri λ_i, μ_i, ν_i sono interi positivi, dalla (1) segue che deve essere $t = 1$, e che inoltre deve aversi: $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1$. Ciò significa che le componenti irriducibili della curva C variano in un unico sistema Σ_1 ($t = 1$); il quale sistema è un fascio ($\nu_1 = 1$); ed entro questo fascio descrivono una serie algebrica di indice 1 ($\mu_1 = 1$), cioè una involuzione: ogni gruppo di tale involuzione costituisce una C. Si ha dunque la proposizione:

Sopra una superficie algebrica, ogni sistema algebrico, semplicemente infinito, di curve riducibili e privo di curva fissa, se ha l'indice 1 *è formato da una involuzione in un fascio.*

2. Vogliamo ora estendere la precedente proposizione ai sistemi algebrici di dimensione $r > 1$; cioè vogliamo dimostrare che:

Sopra una superficie algebrica, ogni sistema algebrico di curve riducibili e privo di curva fissa, qualunque sia la sua dimensione r, *se ha l'indice* 1 *è formato da una involuzione in un fascio.*

Poichè questa proposizione è stata dimostrata per $r = 1$, basterà dimostrare che essa è vera per i sistemi di dimensione r, supponendola vera per quelli di dimensione $r - 1$.

(¹) Cioè che non sia punto base per nessuno dei sistemi Σ_i, che non appartenga alla curva luogo dei punti d'incontro delle varie componenti irriducibili di una medesima C, e che non stia sopra una curva di Σ_i ($i = 1, 2, \ldots t$) per la quale escano due gruppi coincidenti della relativa γ_i.

Sulla superficie F si abbia dunque un sistema algebrico Σ_r, di dimensione r (> 1), il quale abbia l'indice 1, e la cui curva generica C sia riducibile, senza però avere una parte fissa.

Le curve di Σ_r passanti per un generico punto P, della superficie F, formano un sistema Σ_{r-1}, di dimensione $r-1$, che è ancora di indice 1 ed è formato da curve riducibili. Dico che Σ_{r-1} deve avere una curva fissa.

Se, infatti, ciò non accadesse, per la nostra ipotesi (cioè che il teorema sia vero pei sistemi di dimensione $r-1$) Σ_{r-1} sarebbe formato da una involuzione in un fascio H, il quale fascio dovrebbe avere P per punto base. Le curve di Σ_r passanti per un altro punto generico di F, P', formerebbero pure una involuzione in un fascio H', avente P' come punto base; e le curve di Σ_r passanti per entrambi i punti P e P' dovrebbero essere formate da curve di H (*due almeno*) appartenenti anche al fascio H', e quindi passanti per P'. Allora P' sarebbe punto base anche per il fascio H, il che è assurdo, essendo P' punto generico di F. Dunque le curve di Σ_r passanti per un punto generico P, sono formate da una curva fissa, L, e dalle curve di un sistema residuo, Δ_{r-1} (privo di curva fissa), di indice 1.

Se $r=2$, Δ_{r-1} è un sistema semplicemente infinito, e quindi o è un fascio (se la sua curva generica è irriducibile) o è formato da una involuzione in un fascio (se la sua curva generica è riducibile (n. 1)).

Mostriamo che, anche nel caso $r > 2$, Δ_{r-1} è formato da una involuzione in un fascio. Per dimostrar ciò basterà provare che Δ_{r-1} non può esser formato da curve irriducibili. Se, infatti, la curva generica di Δ_{r-1} fosse irriducibile, le curve di Δ_{r-1} passanti per un altro punto generico P', di F, non dovrebbero avere curva fissa. Allora nemmeno le curve di Σ_r passanti per il solo punto P' potrebbero avere una curva fissa; perchè tale curva fissa non potrebbe essere la L, altrimenti questa sarebbe fissa per Σ_r (stante la genericità di P'); e non potrebbe essere un'altra curva L' della superficie, altrimenti la L' farebbe parte anche di tutte le curve di Σ_r passanti per P' e per P, e quindi sarebbe comune a tutte le curve di Δ_{r-1} passanti per P'. Ciò contraddice al fatto sopra dimostrato, che cioè le curve di Σ_r passanti per un punto generico di F, debbono avere una componente fissa: si conclude perciò che Δ_{r-1} è formato da curve riducibili, e quindi da una involuzione in un fascio.

Le curve di Σ_r passanti per un punto generico P sono dunque formate da una curva fissa L, e dai gruppi di una involuzione in un fascio H. Anche le curve di Σ_r passanti per un altro punto generico P' saranno formate da una curva fissa L' e dai gruppi di una involuzione in un fascio H'. Poichè fra le curve di Σ_r passanti per P' vi sono anche quelle passanti per P e per P', le quali sono composte, oltre che della L, di curve del fascio H, ne segue che la curva L' (la quale non può coincidere con la L, nè avere con essa una parte comune, altrimenti questa sarebbe fissa per Σ_r) deve essere composta con curve del fascio H; e ciò per ogni posizione di P'. Se ora pensiamo di far muovere il punto P sulla superficie, la curva L' non cambia (per ogni posizione di P'), e quindi non può variare nemmeno il fascio H. Ne risulta che tutte le curve del sistema Σ_r sono composte con curve di un medesimo fascio, H; e poichè Σ_r è di indice 1, le sue curve determinano entro H una involuzione. Così il teorema enunciato al principio di questo numero è dimostrato.

3. La proposizione dimostrata al n. 2 estende ai sistemi algebrici di indice 1, di curve appartenenti ad una superficie algebrica, il teorema di BERTINI (¹) relativo ai sistemi lineari di curve piane riducibili (²). Ne deriva un complemento al noto teorema di ENRIQUES: *sopra una superficie* F, *un sistema algebrico* ∞^r *con* $r > 1$, *di curve irriducibili, tale che per* r *punti generici di* F *passi una sola curva del sistema, è necessariamente un sistema lineare* (³). Infatti, se il sistema algebrico è di curve riducibili (s'intende, fatta astrazione da una eventuale curva fissa) ora possiamo affermare che esso è formato da una involuzione in un fascio. Ma una involuzione ∞^r, in un ente algebrico semplicemente infinito, o è una serie lineare, o si ottiene aggregando r ad r, in tutti i modi possibili, i gruppi di una involuzione ∞^1 (⁴). Nel caso che la involuzione entro il fascio sia una serie lineare, il nostro sistema algebrico è ancora un sistema lineare, quindi il sopraricordato teorema di ENRIQUES si può enunciare come segue:

Sopra una superficie algebrica, ogni sistema algebrico di curve,

(¹) BERTINI, *Sui sistemi lineari*, « Rendiconti dell'Ist. Lombardo », 1882. Si veda anche: SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, n. 12.

(²) ENRIQUES ha mostrato come il teorema di BERTINI si estende agevolmente ai sistemi *lineari* di curve appartenenti ad una superficie. V. *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze », 1896.

(³) Cfr. ENRIQUES, *Una questione sulla linearità...*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Luglio 1893.

(⁴) V. CASTELNUOVO, « Atti della R. Acc. di Torino », 28, 1893. V. anche: HUMBERT, « Comptes Rendus », 116, 1893; R. TORELLI, « Atti del R. Ist. Veneto », 67, 1908.

di indice 1 *e dimensione* r, *o è un sistema lineare, oppure si ottiene, astrazion fatta da una eventuale curva fissa, aggregando* r *ad* r, *in tutti i modi possibili, i gruppi di una involuzione irrazionale* ∞^1, *in un fascio (irrazionale).*

Sotto questa forma il teorema sussiste evidentemente anche per $r = 1$.

4. A complemento delle cose precedentemente esposte, conviene fare le seguenti osservazioni.

Osservazione I. — Nelle considerazioni dei nn. 1, 2, 3, si è supposto che il nostro sistema algebrico Σ sia irriducibile. Ora, affinchè il ragionamento del n. 2 non subisca eccezioni, bisogna mostrare che, se Σ è irriducibile e di indice 1, le curve di esso passanti per un punto generico della superficie F non possono formare un sistema riducibile. E infatti, se le curve di Σ passanti per un punto generico P si distribuissero in due sistemi algebrici Σ_{r_1} e Σ_{r_2}, supposto che sia $r_1 \leq r_2$, per P e per r_2 punti di F, presi genericamente sopra una curva C di Σ_{r_1}, passerebbero la C e un numero finito di curve di Σ_{r_2}, quindi almeno due curve di Σ; mentre che, essendo Σ di indice 1, per più punti di F atti a determinare un numero finito di curve di Σ (anche se presi in modo particolare), non può passare che *una* di tali curve ([1]).

Osservazione II. — Nei nn. 1, 2, 3, si è escluso che la curva generica del sistema Σ contenga componenti multiple variabili. Esaminiamo ora questo caso.

Supposto che la generica curva C di Σ abbia delle componenti multiple (variabili) si consideri il sistema Σ' le cui curve C' si ottengano dalle C di Σ, contando in esse una volta sola ciascuna componente irriducibile. Se Σ è d'indice 1, anche Σ' è evidentemente d'indice 1; e allora (pel teorema del n. 3) Σ' o è un sistema lineare di curve irriducibili, o è una involuzione in un fascio H. Nella prima ipotesi, le curve di Σ si ottengono contando un certo numero k (> 1) di volte le curve del sistema lineare Σ'.

Nella seconda ipotesi, vogliamo provare che le curve di H costi-

([1]) Questo medesimo ragionamento proverebbe che, qualora Σ fosse un sistema algebrico riducibile che si scinda in sistemi della stessa dimensione, il suo indice dovrebbe essere maggiore di uno. Se, invece, Σ si scindesse in sistemi di dimensione differente, allora la nozione di indice (numero delle curve del sistema passanti per r punti generici della superficie) verrebbe a mancare di una caratteristica essenziale, cioè quella di non cambiare (a meno di divenire infinito) al variare con continuità degli r punti presi sulla superficie. La restrizione, posta nel testo, della irriducibilità del sistema Σ è, perciò, inerente alla natura della questione trattata.

tuenti, entro il fascio, un gruppo della suddetta involuzione, per formare una curva di Σ dovranno contarsi tutte lo stesso numero k di volte. E, infatti, supponiamo, p. es., che delle n curve di H costituenti un gruppo della involuzione (che indicheremo con γ_n), n_1 siano da contarsi k_1 volte; n_2, k_2 volte;... ed n_t, k_t volte $(n_1 + n_2 + ... + n_t = n)$.

Variando il gruppo della γ_n, le n_i curve che van contate k_i volte costituiranno i gruppi di una involuzione γ_{n_i} $(i = 1, 2,... t)$. Ora, se la γ_n ha dimensione 1, anche le varie γ_{n_i} avranno dimensione 1 (non avendo Σ, per ipotesi, curve fisse); e per la curva L, di H, uscente da un punto generico P della superficie passerà un gruppo di ciascuna γ_{n_i}. Se $t > 1$, questi t gruppi non potranno appartenere al medesimo gruppo della γ_n, perchè hanno la curva L comune: e non potranno nemmeno appartenere a gruppi diversi della γ_n, altrimenti vi sarebbe più di un gruppo di quest'ultima passante per la curva L. Ne segue che deve essere $t = 1$, e così il nostro asserto è dimostrato nel caso che la γ_n abbia dimensione 1. Se, poi, la γ_n ha dimensione $r > 1$, consideriamo ancora le curve di Σ passanti per un punto generico P, e quindi per la curva L, di H, uscente da P: otterremo un sistema irriducibile (v. Osservazione I) di dimensione $r - 1$, avente la curva L ed eventualmente anche altre curve del fascio come fisse, ma la cui curva generica avrà sempre un certo numero di curve *variabili*, di H, da contarsi k_i volte (per ogni $i = 1, 2,... t$) (1). Supposto, allora, che la proprietà enunciata sia vera per i sistemi di dimensione $r - 1$, ne segue che dovrà essere $t = 1$, e quindi che la proprietà stessa sarà vera anche pel nostro sistema di dimensione r. Così la nostra asserzione risulta dimostrata. Concludiamo, che, se si ammette che la curva generica del sistema Σ possa avere anche componenti multiple, vale il seguente teorema più generale di quello enunciato al n. 3 (che lo comprende per $k = 1$):

Sopra una superficie F, *le curve (riducibili o no) di un sistema algebrico irriducibile, privo di curva fissa, che sia di indice* 1*; o si ottengono contando* k *volte le curve di un sistema lineare; oppure si ottengono contando* k *volte le curve risultanti dall'aggregare* r *ad* r, *negli* ∞^r *modi possibili, i gruppi di una involuzione irrazionale* ∞^1 *in un fascio.*

(1) Non potrà avvenire che i gruppi della γ_n contenenti la curva L abbiano ad es. come fisso un intero gruppo della γ_{n_1}; perchè fra i gruppi della γ_n passanti per una qualsiasi curva M di H vi sono anche quelli contenenti p. es. i gruppi della γ_{n_2} passanti per la M, i quali gruppi della γ_n contengono gruppi della γ_{n_1} che non passano per la M.