UMI

Sunti di lavori Italiani

* Lavori di: Luigi Campedelli, V. Bernstein

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 104–108.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_104_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

Luigi Campedelli: *Intorno alle superficie ellittiche con un fascio di curve di genere due* (in corso di pubblicazione nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova »).

Precisamente l'A. tratta delle *superficie ellittiche di genere geometrico nullo*, le quali — oltre ad un *fascio ellittico* (K) di curve di genere due — posseggono un *fascio lineare* $|C|$ di curve ellittiche.

È noto che le superficie F di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a = -1$ (non riferibili a rigate), ammettono un gruppo continuo semplicemente infinito, Γ, di trasformazioni birazionali in sè (il quale ha per traiettorie le curve di un *fascio lineare* $|C|$): per questa loro proprietà le F rientrano nella famiglia delle cosiddette *superficie ellittiche* di cui Painlevé (1897) ha indicato una rappresentazione analitica caratteristica mediante funzioni ellittiche di un parametro ed algebriche di un altro: rappresentazione che per $p_g = 0$ è stata sviluppata dall'Enriques (1905).

Sulle F, accanto al fascio $|C|$, esiste un *fascio ellittico* di curve K il cui genere è, in generale, $\pi \geq 1$: una C ed una K si segano in un gruppo G_n di un certo numero n di punti, e i gruppi G_n dànno luogo ad una *involuzione* I_n, che è generata da un gruppo Γ_n, d'ordine n (ciclico o abeliano a base due), di trasformazioni della F in sè, il quale è contenuto nel gruppo semplicemente infinito Γ. Il numero n dicesi *determinante* della superficie F.

La costruzione delle superficie F con determinante primo (caso ciclico) è dovuta all'Enriques (1905), mentre esempi del caso in cui il gruppo Γ_n è abeliano sono stati incontrati dal Bagnera e dal De Franchis (1907). In seguito il Chisini (1921) ha assegnato la costruzione di tutte le superficie ellittiche di genere geometrico nullo, con gruppo abeliano.

Particolare interesse hanno suscitato le superficie F con un fascio ellittico (K) di curve ellittiche $(\pi = 1)$, che sono state studiate e classificate da G. Bagnera e F. De Franchis (1907); da

F. ENRIQUES e F. SEVERI (1908); e ancora, recentemente (1934), per via geometrica, dall'ENRIQUES.

Nel lavoro che qui si riassume, l'A. ha intrapreso l'*analisi delle superficie* F *nel caso in cui il fascio ellittico* (K) *sia costituito da curve di genere due* ($\pi = 2$), ed ha dato la *loro completa classificazione* pervenendo a distribuirle *in dieci diverse famiglie*, di ciascuna delle quali ha determinato, tra l'altro, il tipo di equazione che la caratterizza.

Se indichiamo con f un cilindro cubico ellittico con le generatrici parallele all'asse delle z, le predette dieci famiglie di superficie F si ottengono come segue:

1) superficie F di *determinante* $n = 2$, rappresentate doppiamente sopra il cilindro f, con curva di diramazione costituita da sei sezioni con piani normali all'asse delle z [1];

2) superficie F di *determinante* $n = 3$, rappresentate dal cilindro triplo *ciclico* f, con curva di diramazione costituita da quattro sezioni $z =$ cost. [dell'ordine di diramazione $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$ [2]];

3) superficie F di *determinante* $n = 4$, rappresentate dal cilindro quadruplo *ciclico* f, con curva di diramazione costituita da quattro sezioni $z =$ cost. (dei rispettivi ordini di diramazione $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 4$);

4) superficie F ancora di *determinante* $n = 4$, ma di *tipo abeliano*, cioè possedenti un gruppo abeliano del quarto ordine di trasformazioni birazionali in sè, e che si rappresentano sopra il cilindro quadruplo f con curva di diramazione (semplice) costituita da cinque sezioni $z =$ cost.;

5) superficie F di *determinante* $n = 5$, rappresentate *ciclicamente* con molteplicità cinque sul cilindro f, la curva di diramazione essendo formata da tre sezioni $z =$ cost. ($s_1 = s_2 = s_3 = 5$);

6) superficie F di *determinante* $n = 6$, rappresentate dal cilindro sestuplo *ciclico* f, con curva di diramazione costituita dalle sezioni con quattro piani normali all'asse delle z (prese, rispettivamente, con gli ordini di diramazione $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 3$);

7) superficie F di *determinante* $n = 6$, ancora del *tipo ciclico*,

[1] Si aggiungerà la condizione che sul cilindro multiplo f la generica sezione $z =$ cost. sia immagine di una curva irriducibile, C, della superficie F. Lo stesso si dica nei casi che seguono.

[2] Ogni generatrice k del cilindro n-plo f rappresenta, con la molteplicità n, nna curva K di genere due della F, i punti della k rispondendo ai gruppi della g_n^l segata sulla K dal fascio lineare $|C|$. A un *punto di diramazione dell'ordine* s della k, corrisponde sopra la K un gruppo della g_n^l costituito da n/s punti s-pli.

rappresentate sul cilindro sestuplo f, con curva di diramazione costituita da tre sezioni $z = \text{cost.}$ (aventi gli ordini di diramazione $s_1 = 3$, $s_2 = s_3 = 6$);

8) superficie F di *determinante* $n = 8$, rappresentate *ciclicamente* con molteplicità otto sul cilindro f, la curva di diramazione essendo costituita da tre sezioni $z = \text{cost.}$ (con $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 8$);

9) superficie F di *determinante* $n = 10$, rappresentate dal cilindro *ciclico* 10–plo f, con curva di diramazione costituita da tre sezioni normali all'asse delle z (i loro ordini di diramazione essendo rispettivamente $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 10$);

10) superficie F di *determinante* $n = 12$, del *tipo abeliano*, rappresentate con la molteplicità dodici sul cilindro f, con curva di diramazione composta da tre sezioni $z = \text{cost.}$ (degli ordini di diramazione $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 6$).

Accanto a questa rappresentazione delle F sopra un cilindro multiplo, se ne dà una seconda, assai interessante e suggestiva, alla quale si perviene dallo studio della rigata *ellittica doppia* Φ, le cui generatrici sono immagini delle curve K di genere due. Per la Φ si costruisce, nello spazio ordinario, un particolare modello proiettivo, costituito da una rigata ellittica Φ_4, del quarto grado con due rette doppie α e β, sulla quale *la curva di diramazione* D *incontra in sei punti le generatrici, ed è composta di una o più curve ellittiche (irriducibili) appartenenti ad un medesimo fascio lineare* $|D_1|$, *oltre che, eventualmente, dalle direttrici* α *e* β.

Si prova allora che:

se la D è irriducibile, seisecante le generatrici, si ricade nei casi 10) o 7) secondo che la curva generica del fascio $|D|$ è immagine di una curva irriducibile o riducibile;

se la D è spezzata in due curve trisecanti le generatrici, si hanno i casi 6) o 2) secondo che la curva generica del fascio $|D_1|$, a cui appartengono le componenti la D, rappresenta una curva irriducibile o riducibile;

se la D è spezzata in tre bisecanti le generatrici, e la curva generica del fascio $|D_1|$, cui queste appartengono, è immagine di una curva irriducibile, si ottengono superficie F del tipo 4);

se la D è costituita da una delle rette doppie della rigata Φ_4, e da una curva D_1 pentasecante le generatrici, si hanno i casi 9) e 5) a seconda che la curva generica del fascio $|D_1|$ rappresenta una curva irriducibile o riducibile;

se la D è formata da una curva D_1 quadrisecante le generatrici e dalle due rette doppie della Φ_4, si ricade in 8) (e si dimostra che sopra la Φ_4 doppia, la curva generica del fascio $|D_1|$ rappresenta necessariamente una curva irriducibile);

se la D è composta di due bisecanti le generatrici (appartenenti ad un medesimo fascio lineare $|D_1|$), e dalle due rette doppie della Φ_4, si ha il caso 3) (la curva generica di $|D_1|$ essendo immagine di una curva irriducibile).

Questi risultati si raggiungono seguendo diverse vie che si completano e si controllano a vicenda, e che valgono a lumeggiare la questione sotto ogni aspetto.

V. BERNSTEIN: *Sulla distribuzione degli zeri delle trascendenti intere.* (« Giornale di Matematica », vol. LXXII, 1934).

È noto come la distribuzione dei punti singolari di una funzione analitica $\varphi(z) = \Sigma a_n z^n$ sia legata al modo di crescenza delle trascendenti intere $\Phi_\rho(z) = \Sigma \dfrac{a_n z^n}{\Gamma(1+n/\rho)}$ (ρ numero positivo qualunque) [1]. Più precisamente, se si fa passare per ogni punto singolare $z_s = r_s e^{i\omega_s}$ di $\varphi(z)$ una curva del tipo $r^\rho \cos \rho(\omega - \omega_s) = r_s^\rho$, $|\omega - \omega_s| \leqq \pi/2\rho$, e se l'equazione del campo, formato dai punti che possono essere congiunti coll'origine mediante linee che non segano nessuna delle curve predette, viene scritta nella forma $r^\rho \leqq 1/h_\rho(\omega)$, allora, per ogni ω, è $\overline{\lim\limits_{r=\infty}} \overset{+}{\log} |\Phi_\rho(re^{i\omega})|/r^\rho = h_\rho(\omega)$ [2].

L'A. parte dalla premessa che gli zeri di una trascendente intera $f(z)$ sono tutti punti singolari (poli semplici) della sua derivata logaritmica $f'(z)/f(z)$, la quale non ha altri punti singolari. Applicando pertanto il risultato testè ricordato con $\varphi(z) = f'(z)/f(z)$, egli ottiene un certo numero di criterî, che portano sul modo di crescenza delle funzioni $\Phi_\rho(z)$, e che permettono di asserire che gli zeri di $f(z)$ siano tutti reali (o reali e positivi), oppure che essi siano tutti situati su un dato numero di semi-rette uscenti dall'origine (date *a priori*, oppure arbitrarie).

Citiamo, per es., i criterî seguenti:

1°) Affinchè tutti gli zeri della trascendente intera $f(z)$ siano reali e positivi, ed uno zero almeno esista realmente, occorre che

(1) Ved. E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, 2me éd., Paris, 1928, Ch. III e IV; G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lückensätze und Singularitäten von Potenzreihen* (« Math. Zeitschr. », t. 29, 1929, p. 549); V. BERNSTEIN, *Sulla crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito* (« Mem. R. Acc. d'Italia », vol. IV, 1933, p. 339).

(2) Il simbolo $\overset{+}{\log} A$ (leggesi *logaritmo positivo di A*) denota il logaritmo di A se esso logaritmo è positivo, e zero nel caso contrario.

si abbia, per ogni $\rho > \frac{1}{2}$,

$$(1) \qquad h_\rho(\omega) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} |\Phi_\rho(re^{i\omega})|}{r^\rho} = \begin{cases} a \cos \rho\omega & \text{per } |\omega| \leq \pi/2\rho, \\ 0 & \text{per } \pi/2\rho \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

e basta che questa relazione sia soddisfatta per un solo valore di $\rho > \frac{1}{2}$ (p. es. per $\rho = 1$). Nella (1) a è una costante positiva.

2°) Affinchè tutti gli zeri di $f(z)$ siano distribuiti sopra n semi-rette uscenti dell'origine, occorre che, per ogni ρ abbastanza grande, la funzione di ω, definita dal primo membro della (1), sia della forma $a_\nu \cos \rho(\omega - \omega_\nu)$ su n intervalli $|\omega - \omega_\nu| \leq \pi/2\rho$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, e sia identicamente nulla fuori di essi; agli stessi effetti basta che la condizione precedente sia soddisfatta per un solo valore di ρ.

Oltre a criterî del tipo dei due testè citati, l'A. dà anche criterî che, invece di involvere il modo di crescenza delle funzioni associate $\Phi_\rho(z)$, fanno intervenire *le direzioni di Borel* di tali funzioni. Non essendoci possibile per mancanza di posto di ricordare la definizione delle direzioni di BOREL, e di citare degli esempi di questi ultimi criterî, diremo soltanto che, per ottenerli, l'A. parte dall'osservazione che, nei criterî precedenti, il massimo limite può essere, in certi casi, sostituito dal limite preciso; ciò essendo dimostrato, i criterî del nuovo gruppo si ottengono mediante l'applicazione di un lemma recentemente dimostrato dall'A. [1].

[1] Ved. V. BERNSTEIN, *Sulle direzioni di Julia e di Borel di certe funzioni olomorfe* (« Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. LXVI, 1933, p. 1156).