Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 109–120.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

RECENSIONI

O. Neugebauer: *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften.* Erster Band. Vorgriechische Mathematik. (Berlin, J. Springer, 1934).

In questo volume, dedicato alla divulgazione delle notizie sulla matematica degli Egizii e dei Babilonesi nei tempi preistorici, ricavate dai più recenti studi su materiale paleografico, sono particolarmente interessanti i Capitoli che trattano della matematica babilonese, in massima parte originali, e frutto di personali ricerche dell' A..

Il materiale raccolto è di eccezionale valore, e fa di questo volume il fulcro degli studi che si dovranno fare su la preistoria della nostra scienza; ma se nessuna eccezione può esser mossa su l'accertamento dei fatti, qualche riserva può esser concessa su la loro interpretazione storica; e la franca manifestazione del mio parere a quel proposito, non deve menomare la espressione, che qui intendo di fare, della alta stima verso il Neugebauer, dotto, sagace perscrutatore delle antichità babilonesi, cui mi legano sensi di viva simpatia, di sincera ammirazione, ed anche di gratitudine pel dono delle sue opere, dal cui studio ho ricavato preziosi insegnamenti.

Fonti. — Le fonti per lo studio della cultura preistorica babilonese consistono nelle molte decine di migliaia di mattonelle di argilla, che dal 1843 in poi, si sono tratte e si traggono dal suolo della Mesopotamia.

Tutto quel materiale, conservato in alcuni musei di Europa e di America, si riferisce ad un'epoca estremamente vasta: comprende i diversissimi periodi, dal tempo degli antichi Sumerii (— 3000) all'inizio dell'èra volgare.

Alla comprensione del significato storico del materiale archeologico che si riferisce a così gran lasso di tempo, sarebbe necessaria la determinazione dell'epoca cui i singoli pezzi si riferiscono. Un documento dei tempi di Archimede e di Apollonio acquista ben altro significato se si attribuisce a quelli di HAMMURABI, o degli antichi Sumerii.

Ma quella determinazione pare assai difficile, spesso impossibile.

Il NEUGEBAUER ci informa che la grande incertezza su l'ordinamento dei testi matematici dipende dalla circostanza che essi per massima parte non provengono da scavi sistematicamente eseguiti, ma da furtive ricerche degli arabi, che ne fanno commercio di antichità; ed è aggravato dalla dispersione, in diversi musei, del materiale che originariamente si trovava riunito in una stessa località. I testi sono spesso in uno stato miserando di conservazione: quando si tolgono dalle condizioni climatiche della Mesopotamia, se non sono trattati chimicamente, vanno in polvere dopo pochi anni. Alla classificazione cronologica di quelli sufficientemente conservati poco giova l'esame glottologico, perchè, mentre l'antica lingua di Sumer andava progressivamente scomparendo dall'uso comune, si conservava come lingua scientifica e religiosa, come presso di noi avveniva del latino, e la forma dei caratteri cuneiformi, rimaneva pressochè inalterata.

Anche la interpretazione letterale è difficile e penosa, perchè uno stesso segno può avere fino a 20 e più significati diversi, mentre una stessa parola può essere in più modi rappresentata.

Tutto ciò, mentre ispira ammirata venerazione e somma gratitudine verso quegli infaticabili studiosi, che fanno risorgere dinanzi gli occhi della mente quegli antichissimi popoli, ne svelano la coltura, ne seguono le vicende politiche, ed attraverso la interpretazione di migliaia di mattonelle rintracciano il cammino della scienza, ci ammonisce ad usare la massima cautela nelle deduzioni e nei giudizi circa il significato storico del contenuto di un testo di interpretazione letterale mal sicura, la cui determinazione nel tempo può variare in un intervallo di decine di secoli.

L'Aritmetica babilonese. — L'A. ha in vista uno sviluppo rigoglioso della scienza algebrica, che risalirebbe al tempo della prima dinastia babilonese (— 2000). E poichè lo sviluppo della scienza algebrica non si può comprendere senza un corrispondente sviluppo dell'aritmetica, ci offre nel suo libro un perspicuo quadro dell'aritmetica da quel popolo professata.

Per la rappresentazione dei numeri, i babilonesi avevano due soli segni: per l'unità, e per la decina.

I numeri inferiori a 60 erano rappresentati da 59 cifre formati da aggruppamenti di segni unitari fino a 9, e di simboli della decina fino a 5.

Per numeri superiori al 60 usavano un *principio di posizione imperfetto ed incompleto*, secondo il quale un simbolo numerico posto a sinistra di un altro significava unità (nel sistema sessagesimale) di ordine superiore; ma non era menomamente indicato, nè l'ordine delle unità cui si riferiva il primo simbolo, nè quello cui l'altro andava riferito. Così uno stesso simbolo poteva leggersi indifferentemente: 1, ovvero 60, ovvero 60^{-2},... 1/60, 1/3600,.... Ed un gruppo di tre simboli decadici poteva leggersi 30, od anche $30/60 = 1/2$, oppure $30 \times 60 = 1800$,....

La moltiplicazione esigeva la preventiva cognizione dei $\frac{59 \times 58}{2}$ prodotti a due a due, che si fanno colle 59 cifre che intervengono nella numerazione sessagesimale. Non sarebbe stato possibile il mandare a memoria sì gran numero di prodotti parziali, d'onde la necessità di tavole di conti fatti (di tabelline o librettine di moltiplicazione) che effettivamente si sono in gran numero rinvenute fra le mattonelle matematiche venute in luce.

La divisione si faceva col moltiplicare il dividendo per l'inverso del divisore, cioè per il numero che moltiplicato per il divisore dà per prodotto l'unità, o meglio, una potenza del 60.

Si prepararono perciò, con inaudito travaglio, un numero interminabile di tavole di inversione.

Gli inversi dei numeri (interi) hanno la stessa rappresentazione degli interi. Anche da noi si rappresentano le frazioni decimali con norme analoghe a quelle seguite per gli interi, ma mentre nella nostra numerazione la virgola decimale indica l'inizio delle cifre pertinenti alla parte frazionaria, e l'uso dello zero permette di stabilire per ogni cifra l'ordine frazionario cui appartiene, nella numerazione babilonese non c'era nessun segno che facesse distinguere la parte frazionaria da quella spettante agli interi, nè alcuna indicazione valida a segnare l'ordine cui le varie cifre appartengono.

Nelle tavole di inversione sono tralasciati i numeri 7, 11, 13, 14,... in generale tutti quelli che contengono qualche fattore diverso dai numeri 2, 3, 5, soli fattori del 60. Per tali numeri (detti dal NEUGEBAUER *irregolari*) non era possibile ai babilonesi il calcolare l'inverso, nè quindi l'eseguire divisioni ove essi comparissero quali divisori.

La difficoltà che essi non sapevano superare è quella medesima che si presenta nel calcolo delle frazioni decimali, quando il divisore contiene fattori diversi dal 2 e dal 5, e non sia esattamente contenuto nel dividendo; ma, mentre da noi tale difficoltà è superata sia col prendere il valor prossimo del quoziente, risultante da un certo numero di cifre esatte dopo la virgola, sia col ricorrere al calcolo delle frazioni ordinarie, i babilonesi non avevano il concetto di frazione ordinaria, e nelle molte migliaia di tavole matematiche babilonesi fino ad ora esaminate, non s'è trovato esempio di una divisione fatta con divisore contenente fattori primi diversi da quelli che compariscono nel 60.

Irrazionalità quadratiche. — Il NEUGEBAUER dice di aver trovato due soli esempi, in tutto il materiale di studio che si riferisce alla matematica babilonese, di estrazione di radice quadratica da un numero non quadrato. In uno di essi il calcolatore se la cava mutando i dati del problema, in modo da ottenere un numero quadrato.

Ma nemmeno il secondo esempio è probativo, e non se ne può dedurre che i babilonesi avessero regola opportuna al calcolo approssimato della radice quadrata di un numero non quadrato.

Del resto bisogna venire ad ARCHIMEDE, per trovare i primi esempi storicamente accertati di un tale calcolo.

L'Algebra babilonese. — I babilonesi (al tempo di HAMMURABI cui l'A. riferisce i testi da lui studiati) non sapevano fare la divisione per numeri che contenessero fattori primi diversi dal 2, dal 5, dal 3; non sapevano calcolare, con regola generale, valore prossimo della radice quadrata di un numero non quadrato, non possedevano il calcolo delle frazioni ordinarie nè quello degli irrazionali quadratici; il campo di razionalità aritmetico di cui disponevano era dunque ben ristretto! ed assolutamente inadatto alla risoluzione algebrica di equazioni di qualsiasi grado, che non fossero apprestate in guisa da avere per radici numeri prestabiliti, appartenenti a quel campo. *In tali condizioni non è concepibile scienza algebrica*, a meno che essa non si presenti sotto veste di *algebra geometrica*.

Ma dalla risoluzione di problemi rintracciati nei testi si scorge che essi supplivano, alla deficenza del mezzo, con genialità inventiva e col laborioso apprestamento di tavole numeriche; e, colla applicazione, instancabilmente ripetuta, di ogni specie di calcoli ad esempi pratici standardizzati, riescivano a trovar regola idonea allo scioglimento di quesiti, che noi riguardiamo come dipendenti da elevate teorie algebriche.

I problemi risoluti nei testi, si riferiscono a figure geometriche: in generale rettangoli, o triangoli, o parti che si ottengono con la divisione di triangoli con rette parallele ad un lato; ma non mancano problemi sul cerchio e le sue parti, nè su figure solide: parallelepipedi, piramidi, cilindri, coni, tronchi di piramidi e di coni.

I dati numerici sono sempre molto semplici, e calcolati « *a posteriori* », dopo cioè di aver fissato per l'elemento incognito un preordinato valor numerico opportunamente scelto. Tolto qualche caso eccezionale, non è indicato il procedimento seguito, o da seguire per la risoluzione, ma solo il valor numerico della soluzione, o, tutt'al più, la indicazione delle operazioni aritmetiche da fare per il calcolo di tale valor numerico.

Tralascio dal considerare problemi del 1° grado, alla cui risoluzione non occorre metodo algebrico, e quelli del 2° grado che sono molto interessanti, ma che richiedono ulteriore disamina.

Veniamo piuttosto a quelli che sono messi in relazione colla risoluzione di equazioni biquadratiche, o trascendenti, a proposito dei quali mi pare opportuno qualche riserva intorno al significato storico ad essi attribuito.

Il NEUGEBAUER ha trovato non meno di 650 problemi che potrebbero essere tradotti in equazioni biquadratiche; ma che si riferiscono tutti ad uno stesso rettangolo, ed hanno tutti le stesse soluzioni $x = 30$, $y = 20$, per i lati di quel rettangolo.

Una serie di equazioni del secondo grado, si riferiscono tutte a quel medesimo rettangolo ed hanno tutte le stesse radici, sempre $x = 30$, $y = 20$.

Quello stesso rettangolo, sempre quello! figura anche come base del parallelepipedo che è soggetto dei problemi del 3° grado, nei quali il NEUGEBAUER riconosce la risoluzione delle equazioni cubiche in Babilonia.

A voler prendere sul serio la risoluzione di quei problemi (nei quali si richiede di calcolare le dimensioni della base, cioè di quel famoso rettangolo) la trascrizione algebrica porterebbe ad equazioni riducibili alla forma $x^3 + x^2 = a$. Il NEUGEBAUER che ha trovato una tavoletta in cui sono calcolate le somme del quadrato e del cubo dei primi 30 numeri, mette in relazione questa tavola con quei problemi, e, considerando che qualunque equazione cubica può sempre essere ridotta alla forma $x^3 + x^2 = a$, conclude che i babilonesi, al tempo di HAMMURABI, sapevano risolvere le equazioni cubiche generali, complete (o non, piuttosto, solo le equazioni numeriche preparate in guisa da avere per radici uno dei 30 numeri interi contenuti nella tavoletta?).

Ma si può dire equazione algebrica quella di cui è nota preventivamente la radice? E può esistere problema quando non ci sono incognite da determinare? E l'algebra a che serve, se non per trovare i valori delle incognite?

Credo inutile avvertire che qui non si tratta di trovare *tutte le radici* di una equazione di grado superiore al 1°; a quel tempo era già molto il trovarne una soluzione, e le soluzioni negative od immaginarie non erano nemmeno nella mente degli Dei!

Quelle che si dicono *equazioni*, non saranno state piuttosto esercitazioni di calcolo numerico, proposte per sveltire gli scolari nel tormentoso calcolo sessagesimale? O, se vogliamo guardare più in alto, non avranno cercato se da centinaia di esercitazioni, fatte su gli elementi di una stessa figura geometrica, si potessero ricavare relazioni fra tali elementi, atte allo scioglimento di quesiti, che noi interpretiamo con equazioni algebriche?

Di tale natura non era anche il metodo che essi applicavano allo studio dei fenomeni celesti, quando da centinaia di osservazioni, ripetute per anni e per secoli, si studiavano di ricavare le leggi del moto dei pianeti?

Si possono fare svariatissime ipotesi, ma quella di vedere, in quelle pseudoequazioni, la prova di una scienza algebrica, puramente speculativa, elevata alle più alte cime, è, fra le ipotesi, la meno probabile.

Un altro punto nel quale non posso convenire col NEUGEBAUER è quello che riguarda i cosidetti « *Problemi trascendenti* ».

Sono due problemi che riguardano semplici casi numerici di calcolo di interessi composti.

Non pare lecito il poter dedurre dalla soluzione numerica di quei problemi la cognizione, presso i babilonesi del tempo di HAMMURABI, della teoria delle equazioni esponenziali, nè di quella dei logaritmi. Del resto entrambi quei problemi, cogli stessi dati numerici, si trovano anche nel « *Liber Abbaci* » di LEONARDO PISANO (pp. 266, 311) e sono risoluti bonariamente, senza equazioni esponenziali nè logaritmi.

Per concludere, il libro del NEUGEBAUER contiene un materiale prezioso per la preistoria della scienza matematica, raccolto con indefessa fatica, elaborato con somma cura, ma non ancora interpretato in modo che possa soddisfare la critica storica. Fa nascere il dubbio che la determinazione cronologica non debba essere riveduta, il senso di qualche essenziale lacuna, ed il desiderio di ulteriori notizie che avvicinino e congiungano i tempi degli antichissimi ACCAD a quelli posteriori alla caduta di NINIVE, quando, per oltre cinque secoli, l'astronomia babilonese (sorella e compagna della matematica) uscita dallo stadio di illuminato empirismo, a contatto con la nascente scienza ellenica si elevava allo stadio di pura scienza speculativa.

ETTORE BORTOLOTTI

O. Zariski: *Algebraic surfaces* (« Ergebnisse der Math. », t. III, 5); Berlin. Springer, 1935; pp. V+198.

La geometria su di una superficie algebrica — quale si è venuta sviluppando nell'ultimo cinquantennio, secondo i tre indirizzi algebrico-geometrico, topologico e trascendente — costituisce ormai un tutto complesso ed armonico d'incomparabile bellezza, in cui giocano concezioni ardite ed originali, fuse, nel modo più impensato ed interessante, con elementi tratti da rami disparati della matematica (geometria proiettiva iperspaziale e numerativa, topologia, teoria delle funzioni analitiche e dei loro integrali, ecc.). Ed è superfluo rammentare l'eccezionale importanza del contributo arrecato dagli Italiani a quella disciplina.

L'argomento suddetto rientra nel vastissimo programma tracciatosi dal Severi nella Prefazione al 1° volume del suo *Trattato di geometria algebrica,* Trattato che, sia qui detto per inciso, sarebbe vivamente desiderabile di veder presto proseguito. Mancando però finora una sistemazione didattica d'assieme dell'ampia materia, tanto più era sentito il bisogno di un'agile esposizione della teoria, che tenesse conto dei varî suoi aspetti e che in pari tempo desse una ragione, più o meno sommaria, dei risultati: e la presente Monografia dello Zariski risponde a tali esigenze, in modo veramente mirabile.

Pur non essendo un vero e proprio Trattato, e non volendo nè potendo — per ragioni di spazio — ambire alla completezza, essa costituisce una guida eccellente, tanto per il principiante quanto per chi è già famigliare colla geometria su di una superficie algebrica. Il primo vi troverà esposti, sotto forma lucida e stringata, i punti fondamentali della teoria (1), insieme ai metodi ed ai procedimenti più tipici di cui essa si vale. Il secondo vi apprezzerà l'obbiettività delle citazioni e la profondità dell'elaborazione, da cui è manifesto esser l'A. costantemente risalito alle fonti, e si gioverà di numerose considerazioni originali e dello spirito critico da cui il libro è permeato (2).

(1) Ad eccezione degli sviluppi, dovuti in gran parte ordinatamente all'Enriques ed al Comessatti, che concernono la classificazione delle superficie mediante i loro invarianti e lo studio delle superficie dal punto di vista reale: per essi l'A. rinvia ad altre recenti trattazioni.

(2) Tanto per fare un esempio segnaliamo il contenuto delle pp. 11-12, ov'è provato che — contrariamente a quanto era stato anteriormente asserito da altri — *quando si proietta genericamente su di un piano un ramo di curva algebrica sghemba, la composizione della singolarità di questo (definita col metodo delle trasformazioni quadratiche successive) differisce di solito dalla composizione della singolarità proiezione.*

Occorre poi aggiungere che le dimostrazioni contengon talvolta spunti personali, ed hanno sovente un carattere schematico che mette a nudo l'essenza delle cose, senza tuttavia nuocere all'intelligibilità. Non sempre il testo in esame riesce di facile lettura, data l'elevatezza degli argomenti di cui tratta e delle nozioni che qua e là presuppone; lo si legge però da cima a fondo, con interesse e piacere vivissimi.

L'Opera si divide in 8 Capitoli e 2 Appendici, di cui ora brevemente diremo.

Il Cap. I tratta della riduzione delle singolarità di curve e superficie, mediante trasformazioni cremoniane o birazionali di queste ultime; e segnaliamo, come meno nota e degna di studio, la *classificazione topologica delle singolarità.* Il Cap. II è dedicato alla teoria dei sistemi lineari di curve su di una superficie; assai accurate, ed in parte nuove, sono le considerazioni sui *punti base infinitamente vicini* e sulle *curve eccezionali riducibili.* Il Cap. III perviene (coll'introduzione dei *sistemi subaggiunti ed aggiunti*) ai sistemi canonico e pluricanonici, ed agli invarianti geometrici di una superficie algebrica. Il Cap. IV definisce il genere aritmetico, di cui stabilisce l'invarianza, ed estende il teorema di RIEMANN-ROCH alle superficie; tale estensione è poi sfruttata nella questione dell'*eliminazione delle curve eccezionali* e nella *classificazione delle rigate.*

Il Cap. V chiude la parte algebrico-geometrica, occupandosi dei sistemi continui di curve su di una superficie algebrica, e di varî importanti argomenti collegati al precedente *(varietà di* PICARD, *criteri di equivalenza, teoria della base ed invariante* σ *di* SEVERI, *moduli).* L'A. s'intrattiene assai sulla questione fondamentale della *completezza della serie caratteristica di un sistema continuo completo,* rilevando (col SEVERI) com'essa attualmente — esclusi casi speciali — sia stata soddisfacentemente risoluta soltanto per via trascendente.

Il Cap. VI studia le proprietà topologiche delle superficie algebriche, effettuando la *riduzione a celle* di queste ultime attraverso alla loro rappresentazione sul piano multiplo; poggiando su ciò, perviene quindi alla dimostrazione dei teoremi di dualità (di POINCARÉ) nel caso delle riemanniane delle superficie algebriche. Infine, come applicazione, esso espone la teoria topologica delle corrispondenze algebriche fra curve.

Il Cap. VII, che è il più esteso, è volto al lato trascendente della teoria. Esso contiene i tratti salienti delle belle ricerche dedicate principalmente da PICARD, SEVERI, ENRIQUES, CASTEL-

NUOVO, POINCARÉ, LEFSCHETZ e HODGE allo studio degl'integrali semplici e doppi, di prima e di seconda specie, attaccati ad una superficie algebrica. Nell'ampio quadro sono pure rapidamente indicate — quali teorie collaterali — quelle concernenti gl'*integrali abeliani riducibili* e le *matrici di* RIEMANN (1), oltre a numerose *applicazioni*.

L'ultimo Capitolo è dedicato al problema dell'esistenza di una funzione algebrica di due variabili, data che ne sia la curva di diramazione, ed allo studio dei sistemi continui di curve piane con soli nodi o con nodi e cuspidi.

L'Appendice A svolge gli elementi della recente teoria delle serie di equivalenza di gruppi di punti. L'Appendice B tratta delle corrispondenze fra varietà algebriche, limitandosi al punto di vista topologico-numerativo, e giungendo al *principio di corrispondenza di* ZEUTHEN-SEVERI relativo alle superficie: l'interessante procedimento (di carattere topologico) che qui vien seguito, è tratto da un lavoro del TODD in corso di stampa, e si vale della *formula di* LEFSCHETZ (pure rapidamente giustificata) sui punti uniti di una corrispondenza fra varietà algebriche sovrapposte.

Vi è infine un'accurata *bibliografia* ed un *indice per materie*; la prima riesce di notevole estensione, nonostante sia rigidamente ristretta agli argomenti precedentemente esposti.

BENIAMINO SEGRE

E. A. WEISS: *Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik* (« Teubners Math. Leitfäden », Bd. 41); Leipzig, Teubner, 1935; pp. VI+122.

Questo pregevole libretto della Collezione teubneriana, fornisce principalmente una chiara esposizione della parte elementare delle profonde vedute dello STUDY sulla geometria della retta e sulla cinematica dello spazio ordinario. Il raccostamento e le analogie fra questi due argomenti, sono motivati dal fatto che, come le *rette* di S_3 si possono — col KLEIN — assimilare ai punti di una V_4^2, così i *movimenti* di S_3 si rappresentano — seguendo lo STUDY — coi punti di una V_6^2.

(1) Osserviamo che, nelle citazioni a questo riguardo, è stato inavvertentemente omesso il nome del SEVERI (al quale risale la denominazione di *sistema regolare* d'integrali riducibili), e che qui sarebbe forse stato opportuno un accenno meno fugace ai lavori dello SCORZA e del ROSATI sull'argomento.

Il tema è sviluppato con molta abilità didattica, dando la dovuta importanza alla parte algoritmica. Esso offre il destro all'A. di soffermarsi su numerosissime questioni collaterali interessanti, fra le quali indichiamo le seguenti: *simbolismo di* WEITZENBÖCK pei complessi lineari di rette in S_3; trattazione (dello STUDY) concernente la *trasformazione di contatto di* LIE fra rette e sfere, e varie sue applicazioni; fondamenti della *geometria non euclidea* secondo CAYLEY e KLEIN, e *principio di trasporto* (dello STUDY) fondato sulla rappresentazione delle rette dello spazio iperbolico coi punti di un piano complesso; *quaternioni* e sostituzioni lineari ternarie ortogonali.

Ciò basterà a dare un'idea della ricchezza e varietà della materia che qui l'A. perviene a svolgere, nonostante la ristrettezza dello spazio e l'esiguità delle nozioni ch'egli presuppone note. La lettura del volumetto riesce assai facile, gradevole e sommamente istruttiva.

BENIAMINO SEGRE

MARSTON MORSE: *The Calculus of variations in the large.* « American Mathematical Society », New York, 1934, pp. V+368.

In questo libro l'A. si propone lo studio dei problemi liberi di Calcolo delle variazioni in un iperspazio qualunque, seguendo un metodo da lui già sviluppato in numerose Memorie, e che costituisce, secondo quanto Egli afferma nella prefazione, una forma di macro–analisi.

All'A. sembra probabile che varî e importanti problemi della fisica matematica, della geometria e dell'analisi non potranno essere risolti che con un rinnovamento dei metodi di quella che è attualmente considerata analisi pura.

È opportuno osservare, anche prima di indicare in che cosa consiste il metodo del MORSE, che il Calcolo delle variazioni ha effettivamente portato a una evoluzione qualitativa dell'analisi, il cui risultato più brillante per la sua importanza fondamentale è forse il teorema di ASCOLI, sul quale si basano le ricerche ormai classiche, nel Calcolo delle variazioni e nella teoria delle equazioni differenziali di ARZELÀ, HILBERT, LEBESGUE, TONELLI. I metodi seguiti da questi matematici, noti generalmente col nome di metodi diretti, costituiscono una forma di macro–analisi nel senso che sono indipendenti da procedimenti di calcolo e che i loro risultati non si riferiscono a degli intorni opportunamente ristretti.

Il metodo del MORSE non rientra in questo ordine di idee, anzi è più vicino ai metodi classici del Calcolo delle variazioni, coi quali ha in comune la lacuna relativa alle questioni di esistenza dell'estremo assoluto.

Nei primi capitoli l'A. dimostra le condizioni di EULERO, WEIERSTRASS, LEGENDRE, JACOBI, e dallo studio della variazione seconda passa a stabilire un problema ai limiti per un sistema di equazioni differenziali dedotto dal problema di Calcolo delle variazioni assegnato e dipendente da un parametro λ. Dallo studio degli autovalori di questo problema deduce quindi sia delle condizioni necessarie sia delle condizioni sufficienti per l'esistenza di un estremo relativo.

Nel capitolo V si dà un'impostazione più generale dei problemi di Calcolo delle variazioni, in quanto invece di considerare degli integrali dipendenti da una curva variabile in uno spazio euclideo a m dimensioni si considerano integrali dipendenti da una curva variabile sopra una varietà con una metrica definita da una forma quadratica positiva. Anche in questo caso più generale si stabiliscono le solite condizioni necessarie e sufficienti e si imposta come nello spazio euclideo il problema ai limiti, di cui si dimostra il carattere invariantivo introducendo i metodi del Calcolo tensoriale.

Nel capitolo VI si studiano i *punti critici* delle funzioni a un valore definite sopra una varietà con una metrica generale, intendendo per punto critico di una funzione $\psi(P)$ un punto in cui si annullano tutte le derivate del primo ordine della funzione stessa. Nei capitoli successivi tale studio viene esteso ai funzionali del Calcolo delle variazioni, sostituendo al punto variabile una curva variabile da cui il funzionale dipende.

Infine nell'ultimo capitolo l'A. applica il suo metodo allo studio del problema delle geodetiche chiuse sopra una superficie convessa completando alcuni risultati del POINCARÉ.

Concludendo possiamo dire che lo studio dei problemi liberi del Calcolo delle variazioni è affrontato in questo libro con estrema generalità, ma ciò non giova certamente a rendere più semplice la trattazione. Osserviamo pure che se l'A. è partito dall'affermazione che varî problemi della fisica matematica, della geometria e dell'analisi sembrano richiedere nuovi metodi, sarebbe stato opportuno che da questi rami della scienza Egli traesse degli esempi a cui applicare il suo metodo; tanto più che al lettore sembra che con questo, nella trattazione di problemi determinati, non si possa andare molto più lontano di quanto si vada applicando, ad esempio, i metodi del classico trattato del BOLZA, ormai superato dai risultati più recenti.

BASILIO MANIÀ

E. J. GUMBEL: *Cours de Statistique mathématique. Distributions.* Lyon, Férréol, 1934.

È un corso professato da E. J. GUMBEL nell' « Institut financier et d'Assurances » dell'Università di Lione, e contiene un'ottima preparazione allo studio più profondo che si può fare delle distribuzioni statistiche in un corso completo di Statistica matematica.

In una cinquantina di pagine litografate sono condensate le nozioni principali sulle medie, sul calcolo approssimativo della dominante, sui momenti, sopra le tavole di mortalità, l'equipartizione, la distribuzione esponenziale, la legge di GAUSS, la legge di GALTON, la legge degli avvenimenti rari, le distribuzioni di PEARSON ed un cenno sul metodo di rappresentare una distribuzione osservata mediante sviluppi in serie basati sulla legge di GAUSS.

Per ogni argomento trattato c'è una ricca bibliografia, ciò che rende utile la pubblicazione per chi intraprende questo ramo di studi.

Mi spiace di dover osservare che l'A. riporta un errore di logica, che, purtroppo, si trova in molti testi di Statistica. È detto che essendo nullo il momento del 3° ordine rispetto alla media aritmetica per le distribuzioni simmetriche, quando esso non è nullo dà una misura di asimmetria. Bisognerebbe aver prima dimostrato che per le distribuzioni non simmetriche il momento del 3° ordine è diverso da zero. Ma ciò non è sempre vero; si possono, infatti, dare esempi di distribuzioni asimmetriche con il momento del 3° ordine nullo. Si può vedere ad es.: VINCI, *Manuale di Statistica* (Bologna, Zanichelli, 1934) ove a pag. 119 del vol. I è riportato un tale esempio che io ho dato nelle mie *Lezioni di Statistica metodologica* tenute all'Istituto Superiore di Scienze economiche e commerciali di Bologna nel 1933 (Padova, C. E. D. A. M).

F. SIBIRANI