Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Guido Fubini

Sulla teorie delle travi flesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 57–67.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

PICCOLE NOTE

Sulla teoria delle travi flesse.

Nota di GUIDO FUBINI (a Torino).

Sunto. - *Si trasforma il metodo dell'ellisse di* CULMANN *in un metodo che ricorre a semplici integrazioni suscettibili di costruzioni grafiche analoghe a quelle del procedimento di* MOHR, *e si confrontano i risultati con quelli ottenuti per altra via.*

Alle usuali ipotesi semplificatrici usate nella teoria delle travi flesse rettilinee il CULMANN ha aggiunto il metodo della ellisse di elasticità per trasportare alle travi ad asse curvo i risultati ottenuti per le travi rettilinee. Questo metodo non ha certo portata generale; basta pensare che, mentre su una sezione retta delle travi ad asse rettilineo gli sforzi normali hanno una distribuzione lineare, per le travi ad asse curvo, anche nella teoria di RESAL e GRASHOF, che pure trascura tanti elementi importanti, la distribuzione degli sforzi normali segue una legge iperbolica. Ciò basta per far prevedere che il metodo di CULMANN sarà applicabile con sufficiente approssimazione soltanto alle travi non troppo fortemente curvate; ciò che a noi risulterà anche dalle formole che qui troveremo. Nel metodo di CULMANN una trave ad asse curvo si scompone in tronchi parziali che si riguardano rettilinei e si studia poi la deformazione globale come risultante della deformazione dei singoli tronchi. Ora questo procedimento è così analogo ai metodi del calcolo integrale da suggerire l'idea che in sostanza l'applicazione di tale procedimento equivalga ad eseguire una integrazione. Questa previsione è completamente confermata in questa Nota, la quale conduce a un integrale che costituisce la generalizzazione alle travi curve del teorema di MOHR per le travi rettilinee (teorema che, per queste travi, è in sostanza soltanto una formola di integrazione per parti ([1])). Il metodo, pur così suggestivo, del CULMANN mi pare forse meno semplice del motodo che qui esponiamo e che pure sembra suscettibile di semplici costruzioni grafiche.

Data una trave rettilinea incastrata ad una sezione estrema, scegliamo ad origine O il baricentro di questa sezione, ad asse Oz l'asse della trave, e (supposto che esista un piano di simmetria) ad asse Oy la normale ad Oz poste in questo piano, ed asse Ox un asse normale ai precedenti. Se λ è la lunghezza della trave, il suo asse sarà il segmento $x=y=0$, $0 \leq z \leq \lambda$. All'estremo $z=\lambda$ sia applicato un sistema di forze: indichiamone con N, T le componenti secondo gli assi delle z e delle y, e con $M(l)$ il momento rispetto al punto $z=l$ dell'asse della trave (asse delle z). Porremo talvolta senz'altro $M(\lambda)=M$. Questo sistema di forze è equivalente ad una sola forza F posta sulla retta f di equazione:

$$Ny - T(z-\lambda) - M = 0 \quad \text{ossia} \quad Ny - T(z-l) - M(l) = 0$$
$$(\text{perchè } M = M(\lambda), \quad \text{cosicchè} \quad M - T\lambda = M(l) - Tl = M(0))$$

od anche, in particolare

$$Ny - T\left(z - \frac{\lambda}{2}\right) - M\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

Questa retta f è la retta impropria se $N=T=0$, cioè se il dato sistema di forze si riduce ad una coppia. Un punto (y, z) appartenente alla sezione fatta nella trave col piano di simmetria $x=0$ subisce, nella deformazione elastica della trave, uno spostamento posto in tale piano, le cui componenti v, w secondo gli assi y, z sono dati, secondo la teoria approssimata consueta, dalle:

$$v = -\frac{1}{m}\frac{N}{EA}y - \frac{1}{2}\frac{M}{EI}\left(z^2 + \frac{y^2}{m}\right) + \frac{T}{EI}\left[\frac{z^2}{2}\left(\lambda - \frac{z}{3}\right) + \frac{y^2}{2m} + \beta z\right],$$
$$w = \frac{N}{EA}z + \frac{M}{EI}yz - \frac{T}{EI}\left[yz\left(\lambda - \frac{z}{2}\right) + \beta y - \psi(0, y)\right], \qquad [I = A\rho^2]$$

([1]) Dalla classica equazione $EIy'' = -M(z)$ della linea elastica, ove M è il momento flettente, E il modulo di elasticità, I il solito momento d'inerzia, si trae per le travi incastrate ($y = y' = 0$ per $x = 0$), integrando per parti:

$$Ey = -\int_0^z 1 \cdot dz \int_0^z \frac{M(z)}{I}dz = -z\int_0^z \frac{M(z)}{I}dz + \int_0^z z\frac{M(z)}{I}dz = -z\int_0^z \frac{M(\xi)}{I}d\xi +$$
$$+ \int_0^z \xi \frac{M(\xi)}{I}d\xi = -\int_0^z (z-\xi)\frac{M(\xi)}{I}d\xi.$$

ove E è il solito modulo di elasticità, m il coefficiente di contrazione laterale, A l'area della sezione retta della trave, $I = A\rho^2$ il suo momento d'inerzia rispetto alla retta uscente dal suo baricentro parallela all'asse x, $\beta y - \psi(x, y)$ è una funzione armonica di x, y che per $x = y = 0$ si annulla almeno del second'ordine, e infine β è una costante legata al solito fattore di taglio t dalla

$$\beta : EI = t : GA \quad \text{ove} \quad G : E = m : 2(m+1),$$

cosicchè

$$\beta = \sigma^2\rho^2 \quad \text{ove} \quad \sigma^2 = 2\frac{m+1}{m}t, \qquad (\sigma = \text{costante numerica}).$$

Consideriamo la figura Φ composta del baricentro ($x = y = 0$, $z = \lambda$) della sezione terminale della trave, e dalla retta $z = \lambda$ che esce da esso. Dopo la deformazione essa andrà nella figura Φ' formata dal punto di coordinate $y + v$ e $z + w$ (calcolate per $y = 0$, $z = \lambda$), cioè dal punto

$$y = -\frac{1}{2}\frac{M}{EI}\lambda^2 + \frac{T\lambda}{EI}\left(\frac{\lambda^2}{3} + \beta\right), \quad z = \lambda\left(1 + \frac{N}{EA}\right)$$

e dalla retta che esce da esso tangente alla curva ottenuta segando col piano yz la base libera della trave deformata, cioè dalla retta che nel piano yz ha per coefficiente angolare il valore per $y = 0$ del rapporto $d(z + w) : d(y + v)$ calcolato, supponendo $z = \lambda$, $dz = 0$, ossia (trascurando, come è ben naturale, nella teoria delle deformazioni elastiche, i termini aventi $1 : E^2$ come fattore) del rapporto $dw : dy$ calcolato supponendo $z = \lambda$. Tale coefficiente angolare è perciò:

$$\frac{M}{EI}\lambda - \frac{T}{EI}\left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\partial[\beta y - \psi(0, y)]}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{\lambda}{EI}\left(M - T\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{EI}M\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Si può portare la figura Φ nella Φ' col *movimento rigido infinitesimo* definito dalle:

$$y' = y + \frac{Tl}{EI}\left(\frac{l^2}{12} + \beta\right) - \frac{l}{EI}\left(z - \frac{l}{2}\right)M\left(\frac{l}{2}\right);$$

$$z' = z + \frac{N}{EA}l + \frac{ly}{EI}M\left(\frac{l}{2}\right).$$

Si è scritto qui l in luogo di λ, per il caso che, tolto alla trave il tronco $l \leq z \leq \lambda$, si studi la sezione $z = l$, anzichè la effettiva sezione terminale $z = \lambda$. Un *punto qualsiasi* (y, z) del piano yz che subisca questo movimento si dirà un punto *rigidamente collegato alla sezione* $z = l$.

Si avrà $y' = y$, $z' = z$, cosicchè il punto (y, z) subirà uno spostamento nullo, ossia sarà il centro della rotazione infinitesima a cui si riduce il movimento qui considerato, se

$$T\left(\frac{l^2}{12}+\beta\right)-\left(z-\frac{l}{2}\right)M\left(\frac{l}{2}\right)=N\rho^2+yM\left(\frac{l}{2}\right)=0,$$

cioè se il punto (y, z) è l'antipolo della retta f, a cui appartiene la forza F, rispetto all'ellisse

$$\frac{y^2}{\rho^2}+\frac{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{l^2}{12}+\beta}=1, \quad \text{ossia} \quad \frac{y^2}{\rho^2}+\frac{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{l^2}{12}+\rho^2\sigma^2}=1.$$

che è precisamente l'*ellisse* di CULMANN per il tronco $0 \leq z \leq l$; ellisse che però in questo studio ha un ufficio puramente accessorio.

È invece di importanza fondamentale la seguente osservazione. Supponiamo rigido (indeformabile) il tronco $l \leq z \leq \lambda$, e concepiamo il punto (y, z) come rigidamente collegato alla sezione terminale $z = l$ del tronco $0 \leq z \leq l$ (unico tronco che si deformi); poi consideriamo rigido quest'ultimo tronco $0 \leq z \leq l$, deformabile il solo tronco $l \leq z \leq \lambda$, e concepiamo il punto (y, z) come rigidamente collegato alla sezione $z = \lambda$. Nelle due ipotesi citate troveremo due spostamenti per il punto (y, z); la loro risultante è (come si può anche verificare col calcolo effettivo) lo spostamento di (y, z) concepito come collegato alla sezione $z = \lambda$ nel caso che tutta la trave si deformi. Cioè, divisa la trave in tronchi parziali, lo spostamento di (y, z) è la somma (geometrica) dei suoi spostamenti nella ipotesi che uno solo dei tronchi parziali sia deformabile; ciò che basta per farci intuire che tale spostamento si dovrà poter calcolare con una integrazione. Per dimostrare questo, consideriamo nel piano yz due assi ortogonali Y, Z legati dalla sola condizione che l'angolo retto YZ sia, anche in verso, uguale all'angolo yz.

Indichiamo con τ la direzione della trave (asse delle z), con ν la direzione normale (asse delle y). Sarà

$$N = F\cos(F\tau); \quad T = F(\cos F\nu); \quad \cos(\nu Y) = \cos(\tau Z); \quad \cos(\nu Z) = -\cos(\tau Y).$$

Di più, se B è il punto medio del segmento $0 \leq z \leq l$ dell'asse della trave, e P è il punto (y, z), allora $M\left(\frac{l}{2}\right)$ è il momento M_B di F rispetto al punto B, mentre y e $z - \frac{l}{z}$ sono le componenti del segmento $\overline{BP}$ sugli assi delle y e delle z. Il precedente movimento rigido sarà, nei nuovi assi, definito pertanto dalle:

$$\eta = Y' - Y = (y' - y)\cos \nu Y + (z' - z)\cos \tau Y =$$
$$= \frac{lF}{EI}\left(\frac{l^2}{12} + \beta\right)\cos \nu F \cos \nu Y + \frac{lF}{EA}\cos \tau F \cos \tau Y - \frac{l}{EI}(Z - Z_0)M_B,$$
$$\zeta = Z' - Z = \frac{lF}{EI}\left(\frac{l^2}{12} + \beta\right)\cos \nu F \cos \nu Z + \frac{lF}{EA}\cos \tau F \cos \tau Z +$$
$$+ \frac{l}{EI}(Y - Y_0)M_B,$$

quando con Y_0, Z_0 si indichino le coordinate del punto medio B, e con η, ζ le componenti dello spostamento subito dal punto (Y, Z).

Al variare di l, cioè *al variare della sezione* z $= l$, *a cui il punto* Y, Z *si immagina rigidamente connesso, tale spostamento cambia*; ed in virtù della precedente osservazione, la differenza tra gli spostamenti corrispondenti a due sezioni, p. es. di due valori l ed $l + \Delta l$ del parametro l, è precisamente lo spostamento che si otterrebbe nell'ipotesi che il tronco $0 \leq z \leq l$ rimanga rigido e che si deformi il solo tronco $l \leq z \leq l + \Delta l$; le componenti di questo si ottengono dalle formole precedenti, sostituendo ad l l'incremento Δl, ed al punto $B = (Y_0, Z_0)$ il punto medio del tronco $l \leq z \leq l + \Delta l$. Dividendo per Δl e passando al limite per $\Delta l = 0$, ne deduciamo (ricordando che $\beta = \sigma^2\rho^2$):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\eta}{dl} &= \frac{F}{EI}\,\{\sigma^2 \cos \nu F \cos \nu Y + \cos \tau F \cos \tau Y\}\,\rho^2 - \frac{M(l)}{EI}\,\{Z - Z(l)\} \\ \frac{d\zeta}{dl} &= \frac{F}{EI}\,\{\sigma^2 \cos \nu F \cos \nu Z + \cos \tau F \cos \tau Z\}\,\rho^2 + \frac{M(l)}{EI}\,\{Y - Y(l)\} \end{aligned}}$$

quando $Y(l)$ e $Z(l)$ siano le coordinate di quel punto dell'asse della trave, che dista l dall'estremo incastrato (ed $M(l)$ è il momento della forza F rispetto a tale punto) [1]. *Queste due derivate sono*

[1] Queste formole si possono naturalmente ottenere anche derivando direttamente le precedenti, appena si ricordi che:

$$Z - Z_0 = Z - Z(l) + Z(l) - Z_0 = Z - Z(l) + \frac{l}{2}\cos(Z\tau);$$
$$Y - Y_0 = Y - Y(l) + \frac{l}{2}\cos(Y\tau); \quad \frac{dZ_0}{dl} = \frac{1}{2}\cos Z\tau; \quad \frac{dY_0}{dl} = \frac{1}{2}\cos Y\tau;$$
$$M_B = M\left(\frac{l}{2}\right) = M(l) - \frac{lT}{2}; \quad T = F\cos F\nu; \quad \frac{dM_B}{dl} = \frac{T}{2};$$

$\left(\text{perchè è anche } M_B = M(0) + l\,\frac{T}{2} = l\,\frac{T}{2} + \text{cost.}\right)$.

nulle nel punto che è antipolo della retta f, *cui appartiene* F, *rispetto all'ellisse*

$$\frac{Y^2}{\rho^2} + \frac{(Z-l)^2}{\sigma^2\rho^2} = 1$$

che potremmo chiamare l'*ellisse elastica* della trave nel punto $Y(l)$, $Z(l)$ considerato. [Si noti che, per travi a sezione *costante*, tutte queste ellissi sono *uguali* tra loro]. Essa si può considerare come *ellisse d'inerzia* di un sistema di masse (al minimo *tre* masse): p. es. di quattro masse uguali, due poste sulla normale alla trave nel punto $Y(l)$, $Z(l)$ ad una distanza $\pm\rho\sqrt{2}$ da questo punto, e due poste sulla tangente alla trave ad una distanza $\pm\rho\sigma\sqrt{2}$ da questo medesimo punto. E, se vogliamo non allontanarci dalla concezione di CULMANN, potremo considerare questa come l'ellisse elastica di un tronco $l \leq z \leq l + dl$ di trave, dando a ciascuna delle masse precedenti il valore $dl : 4EI$, o, per dir meglio, alla massa globale il valore $dl : EI$. L'ellisse di CULMANN relativa al tronco $0 \leq l \leq \lambda$ si può ottenere come l'ellisse d'inerzia di queste masse elementari relative ai varî tronchi infinitesimi dl: le masse poste sulla normale descrivono (se $\rho = \text{cost.}$) due curve parallele all'asse della trave: quelle poste sulle tangenti si possono trascurare, se si trascura l'effetto del taglio.

Le η, ζ sono funzioni di l completamente determinate dalle precedenti equazioni e dalla osservazione che esse sono nulle per $l=0$, perchè un punto rigidamente connesso alla sezione incastrata ha uno spostamento nullo.

Consideriamo ora una trave ad asse curvo, di cui una sezione estrema sia incastrata. E individuiamo ogni punto A dell'asse dando la lunghezza l dell'arco OA che lo separa dal baricentro O della sezione incastrata (l'arco OA è naturalmente un arco dell'asse).

Chiameremo l l'*ascissa* (*curvilinea*) di tale punto A. Il tratto di trave compreso tra le sezioni corrispondenti ai punti di ascissa l, $l+dl$ si può considerare come rettilineo, se dl è piccolo; e le precedenti osservazioni bastano a dedurre che *le equazioni differenziali precedenti valgono anche per questi casi generali.*

Limitandoci ancora al caso di una sola forza F, e scegliendo senz'altro ad asse delle Y un asse parallelo alla retta f, cioè alla forza, troveremo per un punto (Y, Z) rigidamente connesso alla sezione di ascissa λ lo spostamento di componenti

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3,$$

ove:

$$\eta_1 = \frac{F}{E}\int_0^\lambda \frac{\sigma^2}{A}\cos^2\nu\, Ydl = \frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{\sigma^2}{A}\, T\cos\nu\, Ydl\,;$$

$$\eta_2 = \frac{F}{E}\int_0^\lambda \frac{1}{A}\cos^2\tau\, Ydl = \frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{1}{A}\, N\cos\tau\, Ydl\,;$$

$$\zeta_1 = \frac{F}{E}\int_0^\lambda \frac{\sigma^2}{A}\cos\nu\, Y\cos\nu Zdl = \frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{\sigma^2}{A}\, T\cos\nu Zdl\,;$$

$$\zeta_2 = \frac{F}{E}\int_0^\lambda \frac{1}{A}\cos\tau\, Y\cos\tau Zdl = \frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{1}{A}\, N\cos\tau\, Ydl\,;$$

$$\eta_3 = -\frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}\{Z - Z(l)\}\, dl\,; \quad \zeta_3 = \frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}\{Y - Y(l)\}\, dl.$$

I tre spostamenti (η_i, ζ_i) (per $i=1, 2, 3$) si possono considerare come dovuti rispettivamente al taglio T, allo sforzo N normale (cioè normale alla sezione normale della trave) e al momento flettente M. I primi due sono indipendenti dalle Y, Z e definiscono una traslazione (anzi il primo si suole sovente trascurare); l'ultimo una rotazione; questo ultimo termine si può considerare come la generalizzazione al caso attuale (e per un punto qualsiasi $[Y, Z]$ del piano) del teorema di MOHR e si può calcolare con metodi grafici analoghi agli abituali, come abbiamo già enunciato. Ponendo nelle precedenti al posto di Y, Z le coordinate $Y(\lambda)$, $Z(\lambda)$ del baricentro della sezione di ascissa λ, troviamo lo spostamento di questo punto e siamo perciò in grado, facendo variare λ, di costruire gli spostamenti di ogni punto dell'asse e quindi la curva elastica. Le derivate rispetto λ di η_i, ζ_i per $i=1, 2$ si calcolano immediatamente; quelle di η_3, ζ_3 [*ove sia posto* $Y=Y(\lambda)$, $Z=Z(\lambda)$] sono date da:

$$\frac{d\eta_3}{d\lambda} = -\frac{1}{E}Z'(\lambda)\int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}dl, \quad \text{ossia} \quad \frac{d\eta_3}{dZ} = -\frac{1}{E}\int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}dl,$$

ossia:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\eta_3}{dZ}\right) = -\frac{1}{E}\frac{M(\lambda)}{I},$$

ossia:

$$\boxed{EIZ'(\lambda)\frac{d^2\eta_3}{dZ^2} = -M(\lambda)}\,.$$

E analogamente

$$EIY'(\lambda)\frac{d^2\eta_3}{dY^2}=M(\lambda).$$

Queste equazioni sono affatto analoghe a quelle classiche per la trave rettilinea; però in tal caso, se l'equazione della trave è $Z=\text{cost.}$ (oppure $Y=\text{cost.}$) si può scrivere soltanto la seconda (o la prima) equazione.

Confrontiamo ora tutte queste formole coi metodi più sovente usati dai tecnici come sufficientemente approssimati. Evidentemente nulla di più si potrebbe ottenere col metodo suggerito dalla nozione di ellisse elastica secondo CULMANN: con esso la trave è divisa in un numero n finito di parti che si riguardano come rettilinee. Le nostre formole danno senz'altro il risultato ottenuto con passaggio al limite quando n tende ad ∞ ed i tronchi parziali diventano infinitesimi.

Confrontiamo con le formole approssimate dedotte dallo studio diretto dell'arco curvo: in cui i tecnici per lo più applicano così sovente la teoria di RESAL e GRASHOF. Dal punto di vista matematico questa teoria solleva, com'è noto, numerose obbiezioni: senza contare che, specialmente se la curvatura dell'arco è sensibile, resta dubbio se il principio di SAINT VENANT sia ancora applicabile.

Ciò nonostante pare che i metodi inspirati a tali teorie giungano a risultati sufficientemente approssimati; io qui mi accontenterò pertanto di confrontare le formole ora ottenute con quelle contenute nelle classiche *Lezioni* del GUIDI, così diffuse tra noi, e che si inspirano appunto alla teoria sopra citata.

A tal fine calcoliamo la variazione della curvatura della linea elastica, quando i suoi punti (Y, Z) ricevono i sopra definiti spostamenti infinitesimi (η, ζ) e vanno perciò nei punti $Y+\eta$, $Z+\zeta$. La curvatura della linea trasformata è, assunto λ come parametro, rispetto a cui si deriva:

$$\{(Y+\eta)''(Z+\zeta)'-(Z+\zeta)''(Y+\eta)'\}\{(Y+\eta)'^2+(Z+\zeta)'^2\}^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=(Y''Z'-Y'Z'')(Y'^2+Z'^2)^{-\frac{3}{2}}+$$
$$+(Y'^2+Z'^2)^{-\frac{3}{2}}(\eta''Z'-\zeta''Y'+\zeta'Y''-\eta'Z'')-$$
$$-3(Y''Z'-Y'Z'')(Y'\eta'+Z'\zeta')$$

a meno di infinitesimi d'ordine superiore. Poichè

$$Y''Z'-Y'Z''=\frac{1}{R},\quad Y'^2+Z'^2=1,\quad X'X''+Y'Y''=0,$$

e quindi:

$$Y'' = \frac{Z'}{R}, \quad Z'' = -\frac{Y'}{R},$$

ove $1:R$ è la curvatura della linea iniziale, troviamo che l'incremento di curvatura è:

$$\eta'' Z' - \zeta'' Y' - \frac{2}{R}(Y'\eta' + Z'\zeta'),$$

(ove $Y' = \cos Y\tau = -\cos Z\nu$; $Z' = \cos Z\tau = \cos Y\nu$).

Ora dalle equazioni che danno η, ζ si trae [per $Z = Z(\lambda)$, $Y = Y(\lambda)$]:

$$\eta' = \frac{F\sigma^2}{EA}\cos^2\nu\, Y + \frac{F}{EA}\cos^2\tau\, Y - \frac{1}{E} Z' \int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}\, dl =$$

$$= \frac{F}{EA}(\sigma^2 Z'^2 + Y'^2) - \frac{1}{E} Z' \int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}\, dl,$$

$$\zeta' = \frac{F}{EA}(1 - \sigma^2) Z' Y' + \frac{1}{E} Y' \int_0^\lambda \frac{M(l)}{I}\, dl,$$

donde si traggono i valori di η'', ζ''. Se ne trae pure:

$$\eta' Y' + \zeta' Z' = \frac{F}{EA} Y' = \frac{N}{EA} = \frac{N}{EI}\rho^2, \qquad (FY' = N)$$

$$\eta'' Z' - \zeta'' Y' = \left(\frac{F\sigma^2}{EA}\right)' Z' + \frac{F}{EA}(1 - \sigma^2)\frac{Y'}{R} - \frac{M}{EI},$$

cosicchè la variazione di curvatura è:

$$\left(\frac{F\sigma^2}{EA}\right)' Z' - \frac{N}{REA}(1 + \sigma^2) - \frac{M}{EI}.$$

Se noi, trascurando gli effetti del taglio, sopprimessimo senz'altro i termini in σ^2, troveremmo che la variazione di curvatura sarebbe

$$-\frac{N}{REA} - \frac{M}{EI} = -\frac{F\cos(F\tau)}{REA} - \frac{M}{EI}.$$

Il primo termine è (rispetto al secondo) molto piccolo, se la trave è poco curvata, ed è ancora più piccolo se, come è il caso più frequente nelle applicazioni, la trave è sottile perchè $FI:MRA$ è piccolo, ed anche se la forza F è sensibilmente normale all'asse della trave, perchè $\cos F\tau$ è allora anch'esso un numero piccolo.

In tali ipotesi ricadiamo nel risultato accolto nella teoria del GRASHOF che la variazione della curvatura è proporzionale al momento flettente.

Resta però una differenza da illustrare: nella teoria abituale si ammette senz'altro che la forza normale $N = F\cos(F\tau)$ non produca alcun cambiamento nella curvatura anche se si tratta di travi a curvatura sensibile e di sezione non piccola contrariamente ai precedenti risultati. Non vi è nulla di paradossale, perchè non si tratta di contraddizioni logiche, ma solo di differenze tra formole approssimate, differenze di cui però è opportuno chiarire le intime ragioni. Per fissare le idee, supponiamo che la trave sia ottenuta facendo rotare attorno ad una retta r una figura φ piana posta in un *semipiano* uscente dalla retta r; il baricentro di questa figura genererà nella rotazione *un arco di cerchio*, che sarà l'asse della trave.

Supponiamo che in ogni sezione φ normale della trave (posta in un semipiano uscente da r) vi sia soltanto uno sforzo normale, (trascurando senz'altro i momenti flettenti generati da questi sforzi normali). Appare evidente che, se questi sforzi sono ripartiti in modo uniforme le fibre della trave che sono cerchi col centro su r e posti in un piano normale ad r subiscono un allungamento (negativo se si tratta di una compressione) proporzionale alla loro lunghezza; e che perciò la nuova posizione della trave si deduce dalla iniziale facendo variare soltanto l'angolo diedro che da r proietta le sezioni estreme; mentre resta invariato il raggio del cerchio, cui appartiene l'asse della trave. Insomma ogni sezione φ della trave subisce una rotazione infinitesima attorno ad r, mentre nel nostro studio noi ad uno sforzo normale abbiamo fatto corrispondere, d'accordo in ciò col procedimento di CULMANN, una traslazione. Questo mi pare sufficiente per spiegare le differenze dei due risultati (del resto trascurabili per travi a piccola curvatura).

OSSERVAZIONE. — Nelle *Lezioni sulla scienza delle costruzioni* del prof. C. GUIDI, così universalmente note fra noi, l'A., come abbiamo detto, si inspira alla teoria del GRASHOF; ciò nonostante nella Parte II (XII edizione) a pag. 197 sono date due formole [le (183) e (184)] affatto analoghe alle nostre. Si noti però che, per ottenerle, la condizione che la variazione di curvatura è proporzionale al momento flettente è stata sostituita dall'altra che la variazione dell'inclinazione della tangente alla trave abbia, rispetto all'arco l dell'asse, una derivata proporzionale al momento flettente: questa ipotesi che equivale approssimativamente alla precedente per le travi di piccola curvatura, equivale dunque anche alle ipotesi che sono fondamento del metodo esposto nelle presenti pagine. Se si conservasse la condizione relativa all'incremento di curvatura, la strada seguita dal GUIDI (loc. cit.) condurrebbe a risultati analoghi; con l'unica variante che (nelle notazioni della presente Nota) ad $\frac{M}{EI}$ si dovrebbe sostituire

$$\frac{M}{EI} - \frac{N}{REA} = \frac{1}{EI}\left(M - \frac{N}{R}\rho^2\right).$$

Ma non so se questo cambiamento produrrebbe un effettivo ampliamento del campo di applicabilità delle formole qui date, e se veramente ne migliorerebbe l'approssimazione.