Bollettino Unione Matematica Italiana

Angelo Tonolo

Sopra un teorema di confronto di Fubini

* Estratto di una lettera di A. Tonolo al prof. G. Fubini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 67–70.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_67_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Sopra un teorema di confronto di Fubini.

(Estratto di una lettera di A. TONOLO al prof. G. FUBINI)

Sunto. - *Un teorema di confronto che il* FUBINI *ha stabilito per le equazioni differenziali lineari del second' ordine alle derivate ordinarie, viene qui applicato per la dimostrazione di un analogo teorema di confronto relativo ad un sistema differenziale lineare del prim' ordine con due funzioni incognite, dal quale poi si deduce un risultato per le equazioni studiate dal* FUBINI.

. . . . Nella Nota *Su un teorema di confronto per le equazioni del second' ordine alle derivate ordinarie* [1] hai preso in considerazione l'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{1}$$

ove le funzioni $p(x)$, $q(x)$ sono supposte finite, continue, e $p(x)$ anche derivabile in un intervallo (a, b), per la quale hai mostrato essere la funzione

$$j = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q \tag{2}$$

un invariante per la trasformazione $y = \lambda z$, con λ funzione arbitraria di x derivabile in (a, b). Sia

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + P(x)\frac{dY}{dx} + Q(x)Y = 0 \tag{3}$$

[1] « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. II, (1933).

un' altra qualsiasi equazione i cui coefficienti soddisfino alle stesse condizioni dei precedenti, e, in conformità alla (2), si indichi con I il suo invariante

$$I = 2\frac{dP}{dx} + P^2 - 4Q.$$

Il teorema che hai dimostrato nella Nota in discorso è il seguente: *Se nell' intervallo chiuso* (a, b) *sussiste la disuguaglianza*

$$I < j,$$

e se l' equazione (1) *ammette una soluzione per la quale* a, b *sono due zeri consecutivi, allora ogni integrale della* (3) *si annulla almeno una volta nell' intervallo* (a, b).

Ove si pensi che l' equazione (1) è equivalente al sistema

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - z = 0, \\ &\frac{dz}{dx} + qy + pz = 0, \end{aligned} \right.$$

si è tratti a studiare il sistema più generale

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + p_1(x)y + q_1(x)z = 0, \\ &\frac{dz}{dx} + p_2(x)y + q_2(x)z = 0, \end{aligned} \right.$$

e cercare di stabilire per esso un teorema di confronto analogo a quello ora enunciato.

Supponiamo intanto che nell' intervallo (a, b) le funzioni $p_1(x)$, $q_1(x)$, $p_2(x)$, $q_2(x)$ siano a derivata prima continua, e inoltre $q_1(x)$, $p_2(x)$ anche a derivata seconda e invariabili di segno.

Poniamo

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} j_1 &= 2\left(p_1 + q_2 - \frac{q_1'}{q_1}\right)' + \left(p_1 + q_2 - \frac{q_1'}{q_1}\right)^2 - 4\left\{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{q_1}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_1' & q_1' \end{vmatrix}\right\}, \\ j_2 &= 2\left(p_1 + q_2 - \frac{p_2'}{p_2}\right)' + \left(p_1 + q_2 - \frac{p_2'}{p_2}\right)^2 - 4\left\{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{p_2}\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_2' & q_2' \end{vmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Ovviamente si riconosce che queste due funzioni sono invarianti del sistema (5) per ogni trasformazione $y = \lambda\bar{y}$, $z = \lambda\bar{z}$ con λ funzione arbitraria di x derivabile in (a, b).

Consideriamo un altro sistema qualsiasi del tipo (5)

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dY}{dx} + P_1(x)Y + Q_1(x)Z = 0, \\ &\frac{dZ}{dx} + P_2(x)Y + Q_2(x)Z = 0, \end{aligned} \right.$$

ove i coefficienti abbiano le stesse proprietà di quelli del sistema (5). In conformità alle (6), facciamo le posizioni

$$
(8)\quad \begin{aligned}
I_1 &= 2\left(P_1 + Q_2 - \frac{Q_1'}{Q_1}\right)' + \left(P_1 + Q_2 - \frac{Q_1'}{Q_1}\right)^2 - 4\left\{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{Q_1}\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_1' & Q_1' \end{vmatrix}\right\} \\
I_2 &= 2\left(P_1 + Q_2 - \frac{P_2'}{P_2}\right)' + \left(P_1 + Q_2 - \frac{P_2'}{P_2}\right)^2 - 4\left\{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{P_2}\begin{vmatrix} P_2 & Q_2 \\ P_2' & Q_2' \end{vmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo il seguente teorema: *Se nell'intervallo chiuso* (a, b) *sussistono le disuguaglianze*

$$I_1 < j_1, \quad I_2 < j_2,$$

e se y(x), z(x) *costituiscono una soluzione del sistema* (5) *per la quale* a, b *sono due zeri consecutivi di ognuna delle funzioni* y(x), z(x), *allora ogni altra soluzione del sistema* (7) *deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo* (a, b). Infatti dal sistema (5) si traggono le equazioni differenziali del second'ordine

$$(9)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left(p_1 + q_2 - \frac{q_1'}{q_1}\right)\frac{dy}{dx} + \left\{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{q_1}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_1' & q_1' \end{vmatrix}\right\} y = 0,$$

$$(10)\quad \frac{d^2z}{dx^2} + \left(p_1 + q_2 - \frac{p_2'}{p_2}\right)\frac{dz}{dx} + \left\{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{p_2}\begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_2' & q_2' \end{vmatrix}\right\} z = 0.$$

E dal sistema (7) si deducono le analoghe

$$(11)\quad \frac{d^2Y}{dx^2} + \left(P_1 + Q_2 - \frac{Q_1'}{Q_1}\right)\frac{dY}{dx} + \left\{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{Q_1}\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_1' & Q_1' \end{vmatrix}\right\} Y = 0,$$

$$(12)\quad \frac{d^2Z}{dx^2} + \left(P_1 + Q_2 - \frac{P_2'}{P_2}\right)\frac{dZ}{dx} + \left\{\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{P_2}\begin{vmatrix} P_2 & Q_2 \\ P_2' & Q_2' \end{vmatrix}\right\} Z = 0.$$

Per le equazioni (9), (10), (11), (12) i relativi tuoi invarianti coincidono rispettivamente con le funzioni j_1, j_2, I_1, I_2.

Indichiamo ora con $y(x)$, $z(x)$ un sistema d'integrali del sistema differenziale (5), per il quale a, b siano due zeri consecutivi tanto di $y(x)$ quanto di $z(x)$. Queste funzioni soddisfano allora separatamente e rispettivamente alle equazioni (9), (10). Sia $Y(x)$, $Z(x)$ una soluzione qualsiasi del sistema (7), segue che $Y(x)$ soddisfa all'equazione (11) e $Z(x)$ alla (12). Ma avendosi, per ipotesi, in (a, b)

$$I_1 < j_1, \quad I_2 < j_2,$$

ed essendo queste funzioni j_1, j_2, I_1, I_2, come ripeto, anche gli invarianti delle equazioni (9), (10), (11), (12) possiamo applicare il tuo teorema. Ne consegue che $Y(x)$, $Z(x)$ dovranno ammettere almeno uno zero nell'intervallo (a, b).

Il teorema stabilito contiene, come caso particolare, un risultato concernente le tue equazioni differenziali. Consideriamo l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{13}$$

e si supponga che in (a, b) i coefficienti $p(x)$, $q(x)$ siano a derivata prima continua, e inoltre $q(x)$ ammetta derivata seconda e sia invariabile di segno.

Ad essa si può sostituire il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} - z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + q(x)y + p(x)z = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

che è della forma (5), e per il quale gli invarianti sono

$$\begin{aligned} j_1 &= 2p' + p^2 - 4q, \\ j_2 &= 2\left(p - \frac{q'}{q}\right)' + \left(p - \frac{q'}{q}\right)^2 - 4\left\{ q - \frac{1}{q}\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Prendiamo un'altra qualsiasi equazione differenziale del tipo (13)

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + P(x)\frac{dY}{dx} + Q(x)Y = 0, \tag{16}$$

equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dY}{dx} - Z = 0, \\ \dfrac{dZ}{dx} + Q(x)Y + P(x)Z = 0, \end{array}\right. \tag{17}$$

e per il quale gli invarianti I_1, I_2 hanno le espressioni

$$\begin{aligned} I_1 &= 2P' + P^2 - 4Q, \\ I_2 &= 2\left(P - \frac{Q'}{Q}\right)' + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right)^2 - 4\left\{ Q - \frac{1}{Q}\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Si ha il seguente risultato, contenuto nel teorema che ho enunciato: *Se nell'intervallo chiuso* (a, b) *valgono le disuguaglianze*

$$I_1 < j_1, \quad I_2 < j_2,$$

e se y(x) *è una soluzione dell'equazione* (13) *la quale, unitamente alla derivata prima* y'(x), *ammette* a, b *come zeri consecutivi, allora ogni altra soluzione* Y(x) *dell'equazione* (16), *e la rispettiva derivata prima* Y'(x), *devono annullarsi almeno una volta nell'intervallo* (a, b). . . . .