Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Onofri, Antonio Mambriani

Su algoritmi infiniti generati da certe equazioni ricorrenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 71–78.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Su algoritmi infiniti generati da certe equazioni ricorrenti.

Nota di L. Onofri e di A. Mambriani (a Bologna).

Sunto. - *Si studiano due algoritmi infiniti generati da certe equazioni ricorrenti. Fra l'altro, si dànno le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di tali algoritmi. Va notato che il metodo seguito è applicabile allo studio di svariatissimi altri tipi di algoritmi infiniti.*

Nel fascicolo precedente di questo « Bollettino » [1] è stato chiesto di ricercare se, e sotto quali condizioni, una equazione

$$x^3 + x = \lambda \qquad (\lambda \text{ reale})$$

ha l'unica radice reale rappresentabile mediante l'algoritmo infinito

$$\sqrt[3]{\lambda - \sqrt[3]{\lambda - \sqrt[3]{\lambda - \ldots}}} \tag{1}$$

(attribuendo ai radicali significato reale).

Manifestamente, l'algoritmo (1) può pensarsi generato dalla equazione ricorrente

$$c_\nu^3 + c_{\nu+1} = \lambda \qquad (\nu = -1, -2, \ldots) \text{ [2]},$$

purchè si supponga uguale a zero il valore *iniziale* c_0. Invero, con tale valore iniziale, c_{-1}, c_{-2}, $c_{-3}, \ldots$ diventano le successive *ridotte* di (1).

L'algoritmo considerato appare quindi come un caso particolare dell'algoritmo generato da una equazione ricorrente del tipo

$$c_\nu^n + c_{\nu+1} = \lambda, \tag{2}$$

dove: n è un intero positivo, dispari e maggiore di 1 [3]; λ è un numero reale qualsiasi; ν è variabile nel campo dei numeri interi da $-\infty$ a $+\infty$.

La successione

$$\ldots, \; c_{-2}, \; c_{-1}, \; c_0, \; c_1, \; c_2, \; \ldots, \tag{3}$$

soluzione dell'equazione ricorrente (2), risulta univocamente determinata, in virtù della (2), fissando il valore di uno qualunque dei

[1] Vol. XIV (1935), pp. 46-47. Domanda formulata dall'ing. Casimiro Corbetta (di Milano).

[2] Per ragioni che saranno comprese più avanti, abbiamo preferito usare gli indici negativi in luogo dei consueti positivi.

[3] Si è assunto n dispari con lo scopo di assicurare l'unicità dei risultati nelle successive estrazioni di radici n-esime.

suoi elementi. Converremo di assumere c_0 come elemento individuante la (3), ed esprimeremo ciò attribuendo a c_0 il nome di *valore iniziale* della (3). I successivi elementi di (3) hanno, allora le seguenti espressioni dipendenti da c_0:

$$\begin{array}{ll}
c_0, & c_0, \\
c_{-1} = \sqrt[n]{\lambda - c_0}, & c_1 = \lambda - c_0^n, \\
c_{-2} = \sqrt[n]{\lambda - \sqrt[n]{\lambda - c_0}}, & c_2 = \lambda - (\lambda - c_0^n)^n, \\
c_{-3} = \sqrt[n]{\lambda - \sqrt[n]{\lambda - \sqrt[n]{\lambda - c_0}}}, & c_3 = \lambda - \left[\lambda - (\lambda - c_0^n)^n\right]^n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

La presente tabella mette in evidenza che l'algoritmo generale considerato è da ritenersi composto di due algoritmi parziali, *aritmeticamente* distinti:

1°) L'algoritmo di ridotte successive

$$c_0, \quad c_{-1}, \quad c_{-2}, \quad c_{-3}, \dots, \tag{4}$$

che chiameremo brevemente *algoritmo delle radici.*

2°) L'algoritmo di ridotte successive

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \dots, \tag{5}$$

che chiameremo brevemente *algoritmo delle potenze.*

Si constata subito che *se uno di questi due algoritmi è convergente, il valore dell'algoritmo è la radice reale dell'equazione*

$$x^n + x = \lambda. \tag{6}$$

In questa Nota facciamo uno studio sistematico dei nominati algoritmi, stabilendo, fra l'altro, *le condizioni necessarie e sufficienti per la loro convergenza.* Tali condizioni asseriscono, in particolare, che *scegliendo* c_0 *in un conveniente intervallo* (*determinato in corrispondenza di* n *e di* λ), *l'algoritmo delle radici o l'algoritmo delle potenze risulta certo convergente.* Ne consegue, poi, la risposta alla speciale domanda citata in principio, e cioè: *il particolare algoritmo delle radici dato da* (1) *è convergente soltanto quando risulti* $\lambda = 0$ *oppure* $|\lambda| > 1$.

Vogliamo poi rilevare che il metodo seguito nella presente Nota dà un indirizzo non trascurabile allo studio di svariatissimi altri tipi di algoritmi infiniti, come ci proponiamo di mostrare in successivi lavori.

1. Osservazioni sulla successione ricorrente (3). — Una soluzione dell'equazione ricorrente (2) è data manifestamente da $c_\nu = x_0$ ($\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), dove x_0 è la radice reale dell'equazione algebrica (6).

Osserviamo ancora che ciascuna delle tre successioni

$$\{ c_{\nu+1} - c_\nu \}, \quad \{ c_{\nu+2} - c_\nu \}, \quad \{ x_0 - c_\nu \}$$

ha i suoi elementi o tutti nulli o tutti non nulli, e nella seconda eventualità tali elementi sono alternativamente positivi e negativi. Invero, dalle (2) e (6) segue:

$$c^n_{\nu+1} - c^n_\nu = -(c_{\nu+2} - c_{\nu+1}), \quad c^n_{\nu+2} - c^n_\nu = -(c_{\nu+3} - c_{\nu+1}),$$
$$x^n_0 - c^n_\nu = -(x_0 - c_{\nu+1}),$$

e ciò dimostra l'asserto.

Nell'ipotesi che i c_ν non coincidano tutti con x_0, si può dunque affermare:

Sulla retta rappresentativa dei numeri reali, il numero x_0 *separa gli elementi della successione*

(7) $$\ldots, \; c_{-4}, \; c_{-2}, \; c_0, \; c_2, \; c_4, \ldots$$

da quelli della successione

(8) $$\ldots, \; c_{-5}, \; c_{-3}, \; c_{-1}, \; c_1, \; c_3, \; c_5, \ldots.$$

Queste due successioni o sono contemporaneamente costanti o una è crescente e l'altra è decrescente. Esistono quindi sempre i limiti (finiti o infiniti) delle successioni

$$\begin{array}{llll} c_0, & c_{-2}, & c_{-4}, & c_{-6}, \ldots, \\ c_0, & c_2, & c_4, & c_6, \ldots, \\ c_{-1}, & c_{-3}, & c_{-5}, & c_{-7}, \ldots, \\ c_1, & c_3, & c_5, & c_7, \ldots; \end{array}$$

e se tali limiti sono, rispettivamente, α_0, β_0, α_1, β_1 *si ha:*

(9) $$\alpha_0 \leq \beta_0 \leq x_0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1,$$

oppure

(10) $$\beta_0 \leq \alpha_0 \leq x_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1,$$

se è $c_0 < x_0$; *se, invece, è* $c_0 > x_0$, *si ha:*

(9') $$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq x_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_0$$

oppure

(10') $$\beta_1 \leq \alpha_1 \leq x_0 \leq \alpha_0 \leq \beta_0$$

Nell'ipotesi che α_0, β_0 (oppure α_1, β_1) siano finiti; se nella (2), posto $\nu = 2\mu$, si passa al limite per $\mu \to -\infty$ si ottiene

$$\alpha_0^n + \alpha_1 = \lambda,$$

se, invece, si passa al limite per $\mu \to +\infty$ si ottiene

$$\beta_0^n + \beta_1 = \lambda;$$

analogamente, posto $\nu = 2\mu + 1$, risulta

$$\alpha_1^n + \alpha_0 = \lambda, \quad \beta_1^n + \beta_0 = \lambda.$$

Si ha quindi che *le coppie di numeri* (α_0, α_1), (β_0, β_1) *dànno due soluzioni (reali) del sistema*

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} x^n + y = \lambda, \\ x + y^n = \lambda. \end{cases}$$

2. **Sulle soluzioni reali del sistema (11).** — Per lo studio del comportamento asintotico della successione ricorrente (3) importa, anzitutto, stabilire il numero e la collocazione relativa delle soluzioni reali del sistema (11).

Supponiamo, per semplicità di ragionamento, $\lambda \geq 0$, dato che si passa al caso $\lambda < 0$ col solo cambiamento di segno alle variabili x, y del sistema (11).

Eliminando la y dal sistema (11) si ottiene

$$\text{(12)} \qquad f(x) \equiv (x^n - \lambda)^n - x + \lambda = 0,$$

equazione avente tante radici reali quante sono le soluzioni reali di (11).

Uno zero reale di $f(x)$ è, intanto, la radice reale (positiva) x_0 di (6); inoltre, se gli zeri reali e distinti di $f(x)$ sono, in ordine di grandezza crescente,

$$\dots < x_2 < x_1 < x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots,$$

si ha che le soluzioni reali e distinte del sistema (11) sono le seguenti:

$$\text{(13)} \qquad x = x_0,\ y = x_0; \quad x = x_1,\ y = \xi_1; \quad x = x_2,\ y = \xi_2; \ \dots$$

e quelle altre che si ottengono da queste scambiando i valori di x e di y. Ne segue che $f(x)$ ha tanti zeri reali minori di x_0 quanti ne ha maggiori di x_0. Si stabilisce, poi, facilmente che gli zeri reali di $f(x)$ appartengono tutti all'intervallo $-1 \leq x \leq \sqrt[n]{\lambda} + 1$.

Per giungere a conclusioni più precise, in dipendenza del valore di λ, formiamo le derivate:

$$f'(x) \equiv n^2x^{n-1}(x^n - \lambda)^{n-1} - 1 \equiv n^2(x^{n+1} - \lambda x)^{n-1} - 1,$$
$$f''(x) \equiv (n-1)n^2x^{n-2}(x^n - \lambda)^{n-2}((n+1)x^n - \lambda).$$

Calcoliamo la $f'(x)$ negli zeri di $f''(x)$:

$$(14) \qquad f'(0) = -1, \quad f'\left(\sqrt[n]{\frac{\lambda}{n+1}}\right) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{\frac{n^2-1}{n}}}\lambda^{\frac{n^2-1}{n}} - 1,$$
$$f'(\sqrt[n]{\lambda}) = -1.$$

La condizione

$$(15) \qquad f'\left(\sqrt[n]{\frac{\lambda}{n+1}}\right) \lesseqgtr 0$$

si muta, rispettivamente nei tre casi, nell'altra:

$$(16) \qquad \lambda \lesseqgtr \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n-1}}},$$

dove il secondo membro è minore di uno. La (16) equivale anche alla seguente:

$$(17) \qquad f'(x_0) = n^2x_0^{2n-2} - 1 \lesseqgtr 0.$$

1° caso: Sia $\lambda < \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n-1}}}$. Segue da (14) che $f(x)$ ha tre soli zeri reali, tutti semplici; precisamente, lo zero positivo $x_0 < 1$, uno zero negativo $x_1 > -1$, e uno zero positivo $\xi_1 > x_0$.

2° caso: Sia $\lambda = \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n-1}}}$. Si ha che gli zeri reali e distinti di $f(x)$ sono tre; precisamente, lo zero triplo $x_0 = 1 : \sqrt[n-1]{n}$ e altri due zeri semplici, x_1 e ξ_1, nelle stesse condizioni del caso precedente.

3° caso: Sia $\lambda > \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n-1}}}$. Allora $f(x)$ presenta due eventualità: o ha cinque zeri reali x_0, x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 con $x_2 \leq x_1 < x_0 < \xi_1 \leq \xi_2$, o ha il solo zero reale x_0. Precisamente, esiste un certo λ', con $1 < \lambda' < \sqrt[n-1]{2}$, tale che per $\lambda \leq \lambda'$ si presenta la prima eventualità, mentre per $\lambda > \lambda'$ si presenta la seconda eventualità. Di più, si ha che per $\lambda < 1$ è $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ e quindi $\xi_1 < \xi_2$; per $\lambda = 1$ è

$x_1 = 0$, $x_2 < 0$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 > 1$; per $1 < \lambda < \lambda'$ è $-1 < x_2 < x_1 < 0$; per $\lambda = \lambda'$ è $-1 < x_2 = x_1 < 0$.

3. Casi in cui gli algoritmi delle radici e delle potenze sono convergenti. — Consideriamo due coppie di numeri

$$(x_r, \xi_r), \quad (x_{r+1}, \xi_{r+1}),$$

così definite: o esse sono due soluzioni del sistema (11), scritte consecutivamente in (13); oppure, (x_r, ξ_r) è l'ultima delle soluzioni (13) ed è $x_{r+1} = -\infty$, $\xi_{r+1} = +\infty$. Sarà allora:

$$x_{r+1} < x_r \leq x_0 \leq \xi_r < \xi_{r+1}.$$

Scegliamo dapprima il valore iniziale c_0 della successione ricorrente (3) nell'intervallo aperto $x_{r+1} < x < x_r$. Si trova subito che anche tutte le $c_{2\nu}$ appartengono a tale intervallo aperto, mentre le $c_{2\nu+1}$ appartengono all'intervallo aperto $\xi_r < x < \xi_{r+1}$. In virtù delle osservazioni del n.° 1, abbiamo:

se risulta $c_2 > c_0$, è

$$x_{r+1} = \alpha_0, \quad x_r = \beta_0, \quad \xi_r = \beta_1, \quad \xi_{r+1} = \alpha_1;$$

se risulta $c_2 < c_0$, è

$$x_{r+1} = \beta_0, \quad x_r = \alpha_0, \quad \xi_r = \alpha_1, \quad \xi_{r+1} = \beta_1.$$

Fatto poi $c_0 = x_r$, si ha

$$c_{2\nu} \equiv x_r = \alpha_0 = \beta_0, \quad c_{2\nu+1} \equiv \xi_r = \alpha_1 = \beta_1;$$

fatto, invece, $c_0 = x_{r+1}$, si ha

$$c_{2\nu} \equiv x_{r+1} = \alpha_0 = \beta_0, \quad c_{2\nu+1} \equiv \xi_{r+1} = \alpha_1 = \beta_1.$$

Si capisce, poi, come debbano modificarsi le asserzioni precedenti quando si scelga il valore c_0 nell'intervallo $\xi_r \leq x \leq \xi_{r+1}$.

Pertanto, sarà $\alpha_0 = \alpha_1$ (cioè convergerà l'algoritmo delle radici) oppure sarà $\beta_0 = \beta_1$ (cioè convergerà l'algoritmo delle potenze) *soltanto quando* si abbia $x_r = \xi_r = x_0$ e si scelga c_0 nell'intervallo aperto di estremi $x_{r+1} = x_1$, $\xi_{r+1} = \xi_1$. Tale intervallo aperto:

$$x_1 < x < \xi_1 \tag{18}$$

è, manifestamente, il massimo intorno dello zero x_0 della $f(x)$ non contenente alcun altro zero di questa funzione.

Resta ancora da decidere quando, nelle condizioni ora dette, converge l'algoritmo delle radici o quello delle potenze. A tale scopo osserviamo che si ha:

$$f(c_0) = (c_0^n - \lambda)^n - c_0 + \lambda = \{\lambda - (\lambda - c_0^n)^n\} - c_0,$$

ossia

$$f(c_0) = c_2 - c_0\,;$$

onde sarà $c_2 \gtreqless c_0$ a seconda che si avrà ordinatamente negli stessi casi $f(c_0) \gtreqless 0$.

Da ciò, dalle osservazioni precedenti di questo n.° e dallo studio fatto sulla $f(x)$, discende che, scelto c_0 nell'intervallo aperto $x_1 < x < x_0$, si ha $c_2 > c_0$ se è $\lambda \leq (n+1) : n^{\frac{n}{n-1}}$, si ha $c_2 < c_0$ se è $\lambda > (n+1) : n^{\frac{n}{n-1}}$, scelto invece c_0 nell'intervallo aperto $x_0 < x < \xi_1$, si hanno fra c_0 e c_2, ordinatamente nei due casi, le disuguaglianze inverse. Infine, per $c_0 = x_0$, si ha $c_\nu \equiv x_0$, in virtù delle osservazioni fatte in principio del n.° 1.

Riassumendo, e tenendo conto dell'osservazione fatta al n.° 2 circa il segno di λ, possiamo concludere:

I due algoritmi delle radici e delle potenze sono contemporaneamente convergenti, comunque sia λ, *soltanto quando sia* $c_0 = x_0$. *Se è* $c_0 \neq x_0$, *allora:*

L'algoritmo delle radici converge soltanto quando sia

$$|\lambda| > (n+1) : n^{\frac{n}{n-1}}$$

e inoltre quando c_0 *appartenga all'intervallo* (18).

L'algoritmo delle potenze converge soltanto quando sia

$$|\lambda| \leq (n+1) : n^{\frac{n}{n-1}}$$

e inoltre quando c_0 *appartenga all'intervallo* (18).

Ciascuno di questi algoritmi, quando converge, ha per valore x_0.

4. Norme per l'uso dei due algoritmi. Il caso $c_0 = 0$. — Come si è asserito al n.° precedente, per la convergenza di uno dei due algoritmi, delle radici o delle potenze, è necessario scegliere c_0 nell'intervallo (18). Ora, poichè tale intervallo non è generalmente noto *a priori*, torna utile conoscere un valore (appartenente a questo intervallo) da potersi attribuire sempre a c_0. Dallo studio fatto al n.° 2, risulta che un simile valore è $\sqrt[n]{\lambda : (n+1)}$; oppure anche $n\lambda : (n+1)$, come segue dall'osservare che per $c_0 = \sqrt[n]{\lambda : (n+1)}$ si ha $c_1 = n\lambda : (n+1)$.

Escluso il caso di $c_0 = x_0$, privo d'interesse poichè le ridotte c_ν dei due algoritmi sono costantemente uguali a x_0, possiamo notare che gli estremi dell'intervallo (18) si possono determinare coll'approssimazione che si vuole, a mezzo delle ridotte di quello dei due algoritmi che non è convergente. Le ridotte dell'altro algoritmo, che è convergente verso il valore x_0, dànno, a seconda della parità dei loro indici, valori approssimati per eccesso e per difetto di x_0.

Possiamo fare un'ultima osservazione. Dal n.° 2 discende che il punto $x=0$ appartiene all'intervallo (18) sempre e solo quando sia $|\lambda|>1$ oppure $|\lambda|\leq(n+1):n^{\frac{n}{n-1}}$. Ne segue che, scelto $c_0=0$, il corrispondente algoritmo delle radici — che per $n=3$ si riduce all'algoritmo (1) — convergerà soltanto per $\lambda=0$ e per $|\lambda|>1$; mentre il corrispondente algoritmo delle potenze convergerà soltanto per $|\lambda|\leq(n+1):n^{\frac{n}{n-1}}$. Ad esempio, è:

$$\sqrt[n]{2-\sqrt[n]{2-\sqrt[n]{2-\dots}}}=1 \qquad (n>1 \text{ e dispari}),$$

$$\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{10-\dots}}}=2, \qquad \left[\frac{5}{8}-\left\{\frac{5}{8}-\left(\frac{5}{8}-\dots\right)^3\right\}^3\right]^3=\frac{1}{2}.$$