Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Calapso

Alcune superficie di Guichard e loro trasformazione in superficie R

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 78–83.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_78_0>

Alcune superficie di Guichard e loro trasformazione in superficie *R*.

Nota di R. CALAPSO (a Messina).

Sunto. - *In questa nota si trasforma (in termini finiti) il sistema di equazioni relativo alle superficie* N *di* GUICHARD *in quello relativo ai determinanti ortogonali di* GUICHARD *del 5º ordine.*

Poscia si esplicita il passaggio (dai detti determinanti) in reti O *isoterme di uno spazio euclideo* S_4 *e quindi, tenendo conto di quanto l'autore ha già stabilito sulla deformazione proiettiva, si ricava una classe di superficie* R.

La classe di superficie, da cui noi pigliamo le mosse nel presente lavoro, è quella introdotta da C. GUICHARD in una Nota pubblicata nei « Comptes Rendus de l'Académie de Sciences » (1).

(1) C. GUICHARD, *Sur les surfaces isothermiques.* (« Comptes Rendus », vol. 130, pag. 159).

In questa nota l'Autore definisce la generica superficie N della classe mediante la seguente proprietà caratteristica:

« Il existe une surface N', ayant même image sphérique de ses lignes de courbure que la surface N et telle que si r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux de N, r_1' et r_2' les rayons correspondants de N', on ait:

$$r_1 r_2' + r_2 r_1' = \text{cost}$$

la constante n'étant pas nulle ».

Le superficie N di GUICHARD furono oggetto di particolare studio da parte del mio caro, indimenticabile babbo in una memoria pubblicata agli « Annali di Matematica » nel 1905.

A questa memoria [2] rimandiamo il lettore per le notazioni qui adoperate e per alcuni risultati di cui ci serviamo.

In una prima parte del presente lavoro è effettuata una trasformazione delle superficie N di GUICHARD in reti O, di uno spazio ellittico a quattro dimensioni, a curvatura media isotropa costante [3] e quindi — come dimostriamo — necessariamente isoterme.

Poscia viene esplicitato il passaggio, da queste reti, in reti O isoterme di uno spazio euclideo a quattro dimensioni [4], e questa esplicitazione permette di dedurre (dalla rete O dell'S_4 euclideo) la corrispondente superficie R, a norma di quanto abbiamo stabilito nella nostra nota sulla deformazione proiettiva [5].

Sicchè: *dalla classe delle superficie* N *di Guichard si deduce, mediante il procedimento ora esposto, una classe di superficie* R.

[2] P. CALAPSO, *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni.* (« Annali di Matematica », 1905, serie III, tomo XI, pag. 201 e seguenti).

[3] La nozione di curvatura isotropa di una rete O è stata introdotta dal mio babbo nella Memoria: *Intorno alle congruenze rettilinee sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura.* (« Annali di Matematica », serie IV, tomo VIII, 1930-31).

[4] Cfr. P. CALAPSO, *Sulle trasformazioni dei sistemi di linee coniugate ed ortogonali nello spazio S_n*. « Annali di Matematica », serie III, tomo XXX, anno 1921, pag. 119 e seg.).

Per le formole relative alle reti O vedi: C. GUICHARD, *Sur les systèmes orthogonaux*, etc. (« Annales de l'École Normale Sup. », 1897-98, 1903); R. CALAPSO, *Intorno alle reti e congruenze cicliche in uno spazio ellittico a tre dimensioni.* (« Rend. del Circolo Matem. di Palermo », tomo LI, 1927).

[5] R. CALAPSO, *Riduzione della deformazione proiettiva delle superficie R alla trasformazione C_m delle superficie isoterme.* (« Rend. Lincei », 1928, serie 6ª, vol. VII).

Il risultato finale è particolarmente espressivo. Le superficie N di GUICHARD dipendono dal sistema [loc. cit. (2)]

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u}=\left(H+\dfrac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta}\right)\dfrac{\partial\xi}{\partial u}; \quad \dfrac{\partial H}{\partial v}=\left(H+\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}\right)\dfrac{\partial\xi}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\coth\theta\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+\operatorname{tgh}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial v^2}-\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+ \\ \quad +\dfrac{1}{\cosh^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}+\operatorname{senh}\theta\cosh\theta+H\cosh^2\theta+ \\ \quad +H\operatorname{senh}^2\theta+H^2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta=0; \end{cases}$$

ponendo allora

$$(2)\qquad B=-i\frac{\partial\theta}{\partial u}; \quad P=i\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

si ottengono gl'invarianti proiettivi di una superficie R *riferita alle asintotiche* (6).

§ 1. **Relazioni tra le superficie N di Guichard ed i determinanti ortogonali del quinto ordine.** — Ripigliamo il sistema (1) da cui dipende la determinazione delle superficie N di GUICHARD e del quale è conseguenza differenziale la seguente equazione:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}=\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

ed introduciamo le seguenti funzioni ausiliarie:

$$(4)\quad \begin{cases} a_2-ia_3=-\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh^2\theta}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\dfrac{2}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+ \\ \quad +\dfrac{2}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}-\dfrac{2\cosh\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial u}-2\cosh\theta\cdot(1-H)-\operatorname{senh}\theta\cdot(1-H^2) \\ b_2-ib_3=-\dfrac{1}{\cosh\theta}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\dfrac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\dfrac{2}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial v^2}+ \\ \quad +\dfrac{2}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial u}-\dfrac{2\operatorname{senh}\theta}{\cosh^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}-2\operatorname{senh}\theta\cdot(1-H)-\cosh\theta\cdot(1-H^2) \end{cases}$$

Tenendo conto delle (1) e (3), si verifica col calcolo la relazione

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial v}(a_2-ia_3)=\frac{\partial\theta}{\partial v}(b_2-ib_3);$$

(6) I detti invarianti nel loc. cit. (5) sono da noi indicati con b e p. Confronta anche con FUBINI e CECH, *Geometria proiettiva differenziale*, pag. 94.

similmente

$$\frac{\partial}{\partial u}(b_2 - ib_3) = \frac{\partial\theta}{\partial u}(a_2 - ia_3), \tag{6}$$

ed inoltre si ha identicamente:

$$\frac{1}{2}\cosh\theta\cdot(a_2 - ia_3) + \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cdot(b_2 - ib_3) + e^{2\theta} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0. \tag{7}$$

Dopo di ciò, se introduciamo le nuove ausiliarie

$$\begin{cases} a_1 = e^\theta; & b_1 = e^\theta, \\ a_2 + ia_3 = \operatorname{senh}\theta; & b_2 + ib_3 = \cosh\theta, \end{cases} \tag{8}$$

risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_r}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v} b_r; \quad \dfrac{\partial b_r}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u} a_r, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

e quindi le a_r, b_r, $p = \frac{\partial\theta}{\partial v}$, $q = \frac{\partial\theta}{\partial u}$ sono gli elementi di un determinante ortogonale a cinque linee, di GUICHARD [7].

§ 2. **Passaggio allo spazio euclideo a quattro dimensioni.** — Adoperiamo per il suddetto determinante ortogonale di quinto ordine la consueta notazione, cioè:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots\dots & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & \dots\dots\dots & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & \dots\dots\dots & x_{35} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots\dots\dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots\dots\dots & \eta_5 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

sussistono allora le equazioni [GUICHARD, loc. cit. [4]]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k\xi_r; \quad \dfrac{\partial x_{kr}}{\partial v} = b_k\eta_r; \\ \dfrac{\partial \xi_r}{\partial u} = -a_1x_{1r} - a_2x_{2r} - a_3x_{3r} - p\eta_r; \quad \dfrac{\partial\xi_r}{\partial v} = q\eta_r; \\ \dfrac{\partial\eta_r}{\partial u} = p\xi_r; \quad \dfrac{\partial\eta_r}{\partial v} = -b_1x_{1r} - b_2x_{2r} - b_3x_{3r} - q\xi_r. \end{cases} \tag{11}$$

Assunti — p. es. — gli elementi della prima riga $(x_{11}, x_{12} \dots x_{15})$ come coordinate di WEIERSTRASS di punto in uno spazio ellittico a

[7] Cfr. GUICHARD, loc. cit. [4].

quattro dimensioni, si deduce una rete O del detto spazio; mentre ponendo

$$
(12)\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_{11}}{x_{14}+ix_{15}}; & x_2 = -\dfrac{x_{12}}{x_{14}+ix_{15}}; \\ x_3 = -\dfrac{x_{13}}{x_{14}+ix_{15}}; & x_4 = -\dfrac{i}{x_{14}+ix_{15}}; \end{cases}
$$

si ottiene una nuova rete O di un S_4 euclideo [cfr. P. CALAPSO, loc. cit. ([4])].

Qui interessa esplicitare questo passaggio.

Denotiamo, allo scopo, con gli accenti gli elementi del determinante ortogonale (di quarto ordine) — analogo a (10) — relativo alla rete O dell' S_4 euclideo, ed osserviamo le relazioni:

$$
(13)\qquad \begin{cases} x_{2i} = \dfrac{x_i x_{14}' - x_4 x_{1i}'}{x_4}; & x_{24}+ix_{25} = -\dfrac{x_{14}'}{x_4}; \\ x_{3i} = \dfrac{x_i x_{24}' - x_4 x_{2i}'}{x_4}; & x_{34}+ix_{35} = -\dfrac{x_{24}'}{x_4}; \\ x_{1i} = -\dfrac{x_i}{ix_4}; & x_{14}+ix_{15} = \dfrac{1}{ix_4}; \end{cases}
$$

$$
(14)\qquad \begin{cases} \xi_i = \dfrac{x_i \xi_4' - x_4 \xi_i'}{x_4}; & \xi_4 + i\xi_5 = -\dfrac{\xi_4'}{x_4}; \\ \eta_i = \dfrac{x_i \eta_4' - x_4 \eta_i'}{x_4}; & \eta_4 + i\eta_5 = -\dfrac{\eta_4'}{x_4}. \end{cases}
$$

Si deducono allora gli elementi della rete O dell' S_4 euclideo sotto la forma:

$$
(15)\qquad \begin{cases} h' = \dfrac{a_1}{x_{14}+ix_{15}}; & l' = \dfrac{b_1}{x_{14}+ix_{15}}; \\ a_1' = a_2 - \dfrac{x_{24}+ix_{25}}{x_{14}+ix_{15}} a_1; & b_1' = b_2 - \dfrac{x_{24}+ix_{25}}{x_{14}+ix_{15}} b_1; \\ a_2' = a_3 - \dfrac{x_{34}+ix_{35}}{x_{14}+ix_{15}} a_1; & b_2' = b_3 - \dfrac{x_{34}+ix_{35}}{x_{14}+ix_{15}} b_1; \end{cases}
$$

donde

$$
a_1' + ia_2' = a_2 + ia_3 - \frac{x_{24}+ix_{25}+i(x_{34}+ix_{35})}{x_{14}+ix_{15}} a_1.
$$

$$
b_1' + ib_2' = b_2 + ib_3 - \frac{x_{24}+ix_{25}+i(x_{34}+ix_{35})}{x_{14}+ix_{15}} b_1.
$$

§ 3. **Passaggio alle superficie *R*.** — Le formole ora scritte sono valevoli pel passaggio da una rete O dello spazio ellittico a quattro dimensioni (del tutto generale) alla corrispondente rete O dell' S_4 euclideo.

Ma veniamo al caso che interessa l'attuale ricerca.

Per le (8), la rete O dell'S_4 euclideo risulta — nel nostro caso — *isoterma* e di conseguenza possiamo da questa dedurre la corrispondente superficie R dell'S_3 euclideo, secondo il metodo da noi esplicitato nella nota della deformazione proiettiva [loc. cit. (5)].

Gl'invarianti proiettivi della R sono (loc. cit.):

$$B = i\frac{\partial}{\partial u}\log[(a_1' + ia_2') - (b_1' + ib_2')] =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial u}\log[(a_2 + ia_3) - (b_2 + ib_3)] =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial u}\log[- e^{-\theta}],$$

(e l'analoga espressione per P) cioè:

$$B = -i\frac{\partial\theta}{\partial u};\quad P = i\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Sarà oggetto di un prossimo lavoro la caratterizzazione della rete O, dello spazio ellittico, introdotta al § 2, secondo quanto abbiamo annunziato nella prefazione.