
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO DUCCI

La somma delle potenze di egual
grado dei primi n numeri interi in
funzione di quella delle loro prime
potenze

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.2, p. 87–91.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_87_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_87_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

La somma delle potenze di egual grado dei primi n numeri interi in funzione di quella delle loro prime potenze.

Nota di ENRICO DUCCI (a Napoli).

Sunto. - Se s_m indica la somma $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$, essendo m intero-positivo, si fa vedere che con $r > 0$ abbiamo le formule

$$\begin{aligned}s_{2r} &= s_2(p_1^{(r)}s_1^{r-1} + p_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + p_r^{(r)}) \\ s_{2r+1} &= s_1^2(q_1^{(r)}s_1^{r-1} + q_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + q_r^{(r)})\end{aligned}$$

e si determinano i coefficienti $p^{(r)}$ e $q^{(r)}$.

1. Nel vol. XXXII (1° della 2ª serie) anno 1894 del « Giornale di Battaglini » io dimostro che, se s_m rappresenta la somma

$$x^m + (x+y)^m + (x+2y)^m + \dots + [x+(n-1)y]^m$$

con m intero-positivo anche nullo, risulta la relazione

$$(1) \quad \frac{\partial s_m}{\partial n} = my \cdot s_{m-1} + c_m,$$

dove la c_m , costante rispetto ad n , è un polinomio omogeneo di grado m nelle variabili x, y definito con $c_0 = 1$ dalla

$$(2) \quad c_m = m \int c_{m-1} dx + k_m y^m,$$

essendo k_m la classica costante *bernoulliana* determinata così

$$k_0 = 1, \quad k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_{2r+1} = 0 \quad \text{con } r > 0.$$

$$\sum_1^{\frac{1}{2}m} \binom{m+1}{2r} k_{2r} = \frac{1}{2}(m-1)$$

con m pari ed in particolare

$$\begin{aligned}k_2 &= \frac{1}{6}, \quad k_4 = -\frac{1}{30}, \quad k_6 = \frac{1}{42}, \quad k_8 = -\frac{1}{30}, \\ k_{10} &= \frac{5}{66}, \quad k_{12} = -\frac{691}{2730}.\end{aligned}$$

Dalla (1), poichè s_m è divisibile per n , si deduce la formula

$$s_m = my \int s_{m-1} dn + c_m n,$$

e reiterando l'applicazione della (2) a partire da $m=1$, col trascurare perchè nulli i termini contenenti k coll'indice dispari ad eccezione di quello che contiene k_1 , si ha

$$c_m = -\frac{1}{2} m x^{m-1} y + \sum_r \binom{m}{2r} k_2 x^{m-2r} y^{2r},$$

in cui r assume tutti i valori interi da 0 ad $\frac{1}{2}m$ per m pari e da 0 ad $\frac{1}{2}(m-1)$ per m dispari.

Notiamo peraltro che, percorrendo la n la serie dei numeri naturali ed essendo perciò una variabile discontinua, coi simboli $\frac{\partial s_m}{\partial n}$ ed $\int s_{m-1} dn$ non intendiamo punto indicare i concetti di *derivata* ed *integrale*, ma soltanto il complesso delle operazioni pratiche che si debbono eseguire per ottenere la derivata della funzione $s_m(n)$ o l'integrale del differenziale $s_{m-1}(n) \cdot dn$ nell'ipotesi sia n variabile continua.

2. Facciamo adesso un'applicazione della formula (1): Per il caso particolare in cui $x=y=1$, quando cioè s_m rappresenta la somma $1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$, nell'Ediz. 5^a del *Formulario del Peano*, alle pagine 122 e 123 si leggono queste dieci formule:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = s_2 \cdot 1 \\ s_3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = s_1^2 \cdot 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_4 = \frac{1}{5} s_2(6s_1 - 1) \\ s_5 = \frac{1}{3} s_1^2(4s_1 - 1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_6 = \frac{1}{7} s_2(12s_1^2 - 6s_1 + 1) \\ s_7 = \frac{1}{3} s_1^2(6s_1^2 - 4s_1 + 1) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_8 = \frac{1}{15} s_2(40s_1^3 - 40s_1^2 + 18s_1 - 3) \\ s_9 = \frac{1}{5} s_1^2(16s_1^3 - 20s_1^2 + 12s_1 - 3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{10} = \frac{1}{11} s_2(48s_1^4 - 80s_1^3 + 68s_1^2 - 30s_1 + 5) \\ s_{11} = \frac{1}{3} s_1^2(16s_1^4 - 32s_1^3 + 34s_1^2 - 20s_1 + 5). \end{array} \right.$$

Esse ci dicono che s_m , quando m è pari, può esprimersi mediante il prodotto di s_2 per una funzione intera di s_1 di grado $\frac{1}{2}(m-2)$ e, quando è dispari, mediante una funzione intera di s_1 di grado $\frac{1}{2}(m+1)$ e divisibile per s_1^2 . Tanto la funzione che mol-

tiplica s_2 nel primo caso, quanto quella che moltiplica s_1^2 nel secondo è un polinomio completo i cui termini, ordinati secondo le potenze decrescenti di s_1 , sono alternativamente positivi e negativi. Pertanto, se $r=1, 2, 3, \dots$, abbiamo

$$(3) \quad \begin{cases} s_{2r} = s_2(p_1^{(r)}s_1^{r-1} + p_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + p_r^{(r)}) \\ s_{2r+1} = s_1^2(q_1^{(r)}s_1^{r-1} + q_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + q_r^{(r)}), \end{cases}$$

essendo le funzioni di r , $p^{(r)}$ e $q^{(r)}$ alternativamente positive e negative, e legate dalle relazioni

$$p_1^{(r)} + p_2^{(r)} + \dots + p_r^{(r)} = 1 = q_1^{(r)} + q_2^{(r)} + \dots + q_r^{(r)},$$

che si ottengono facendo nelle (3) $n=1$.

Se deriviamo rapporto ad n i membri della seconda delle (3) e teniamo presente la formula (1), sapendosi che quando $x=y$ abbiamo $c_{2r+1}=0$ con $r>0$ ed osservando che $\frac{ds_1}{dn} = \frac{2n+1}{2}$, risulta

$$(2r+1)s_{2r} = \frac{2n+1}{2} s_1[(r+1)q_1^{(r)}s_1^{r-1} + rq_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + 2q_r^{(r)}],$$

la quale, sostituito ad s_{2r} il valore dato dalla prima delle (3),

giacchè $s_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{2} s_1$, diviene

$$\begin{aligned} (r+1)q_1^{(r)}s_1^{r-1} + rq_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + 2q_r^{(r)} &= \\ &= \frac{2}{3} (2r+1)(p_1^{(r)}s_1^{r-1} + p_2^{(r)}s_1^{r-2} + \dots + p_r^{(r)}). \end{aligned}$$

Da questa, se eguagliamo fra loro i coefficienti delle stesse potenze della variabile s_1 , emergono le relazioni

$$(4) \quad q_1^{(r)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r+1}{r+1} p_1^{(r)}, \quad q_2^{(r)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r+1}{r} p_2^{(r)}, \dots \quad q_r^{(r)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r+1}{2} p_r^{(r)},$$

che ci permettono di calcolare le $q^{(r)}$ quando sono note le $p^{(r)}$ e viceversa.

Adunque sarà risolto il problema della determinazione delle $p^{(r)}$ e delle $q^{(r)}$ se sapremo esprimere le une o le altre in funzione di r , o se sapremo dedurre le $p^{(r)}$ dalle $q^{(r-1)}$. Ed ora spieghiamo come si può raggiungere quest'ultimo scopo.

3. La prima delle (3) può scriversi

$$s_{2r} = \frac{2n+1}{3} (p_1^{(r)}s_1^r + p_2^{(r)}s_1^{r-1} + \dots + p_r^{(r)}s_1).$$

e dal n. 1 che $k_{12} = -\frac{691}{2730}$, si possono calcolare prima le $p^{(6)}$ e poi le $q^{(6)}$. Facendo $r=6$ si ottiene dalle (5):

$$p_1^{(6)} = \frac{96}{13}, \quad p_2^{(6)} = -\frac{240}{13}, \quad p_3^{(6)} = \frac{328}{13}, \quad p_4^{(6)} = -\frac{1888}{91},$$

$$p_5^{(6)} = \frac{4146}{455}, \quad p_6^{(6)} = -\frac{691}{455},$$

e quindi dalle (4):

$$q_1^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{96}{13}, \quad q_2^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{6} \left(-\frac{240}{13} \right), \quad q_3^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{328}{13},$$

$$q_4^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} \left(-\frac{1888}{91} \right), \quad q_5^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{4146}{455}, \quad q_6^{(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{2} \left(-\frac{691}{455} \right),$$

e perciò

$$q_1^{(6)} = \frac{64}{7}, \quad q_2^{(6)} = -\frac{80}{3}, \quad q_3^{(6)} = \frac{656}{15}, \quad q_4^{(6)} = -\frac{944}{21},$$

$$q_5^{(6)} = \frac{2764}{105}, \quad q_6^{(6)} = -\frac{691}{105}.$$

Così quando $r=6$ le (3) divengono

$$\begin{cases} s_{12} = \frac{1}{455} s_1 (3360s_1^3 - 8400s_1^4 + 11480s_1^5 - 9440s_1^6 + 4146s_1 - 691) \\ s_{13} = \frac{1}{105} s_1^2 (960s_1^3 - 2800s_1^4 + 4592s_1^5 - 4720s_1^6 + 2764s_1 - 691). \end{cases}$$

5. Chiudiamo coll'invitare il lettore a dimostrare per le $p^{(r)}$ queste tre relazioni

$$p_1^{(r)} = 3 \cdot \frac{2^{r-1}}{2r+1}, \quad \frac{p_1^{(r)}}{r+1} + \frac{p_2^{(r)}}{r} + \dots + \frac{p_r^{(r)}}{2} = \frac{3}{2(2r+1)},$$

$$rp_1^{(r)} + (r-1)p_2^{(r)} + \dots + p_r^{(r)} = \frac{2}{3} \left(2r + k_{2r} - \frac{2}{3} \right);$$

e per le $q^{(r)}$ queste quattro

$$q_1^{(r)} = \frac{2^r}{r+1}, \quad q_{r-1}^{(r)} = -8(2r+1)k_{2r}, \quad q_r^{(r)} = 2(2r+1)k_{2r},$$

$$rq_1^{(r)} + (r-1)q_2^{(r)} + \dots + q_r^{(r)} = \frac{1}{3}(4r-1).$$