BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO BUZANO

Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.2, p. 93–98.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_93_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie.

Nota di PIERO BUZANO (a Torino).

Sunto. - *Si determina l'unico invariante proiettivo di una coppia di elementi superficiali del 2° ordine, aventi una tangente comune; si assegna un significato geometrico e si pone in relazione l'invariante con lo studio proiettivo-differenziale delle congruenze di rette.*

Ad una coppia di elementi del 2° ordine relativi ai punti A e A^* di due superficie dello spazio ordinario Σ e Σ^* sono connessi degli invarianti proiettivi: nel caso più generale in cui i piani π e π^*, tangenti a Σ e Σ^* rispettivamente nei punti A e A^*, si incontrano secondo una retta che non passa nè per A, nè per A^*, tali invarianti sono in numero di *due* e furono determinati da C. BOUTON [1]; nel caso in cui i punti A e A^* coincidono e così pure i piani π e π^*, si trovano ancora *due* invarianti che furono determinati e studiati

[1] *Some examples of differential invariants* « Bull. Amer. Math. Soc. », 4, 1898, pp. 313-322.

da M. MASCALCHI [1]. In entrambi i casi l'esistenza di uno degli invarianti era già stata prevista da R. MEHMKE [2] [3]. Queste determinazioni non contemplano il caso in cui, essendo i punti A e A^* distinti, la retta AA^* è tangente comune alle due superficie, caso che invece ci sembra interessante anche perchè si connette allo studio proiettivo-differenziale delle congruenze di rette. Vediamo ora come in questo caso, del tutto nuovo, alla coppia considerata di elementi del 2° ordine si connetta *un* (solo) invariante proiettivo.

Supposto che le superficie Σ e Σ^* siano analitiche e regolari in certi intorni dei punti A e A^* e che i piani π e π^* siano distinti e si seghino lungo la retta AA^*, scegliamo un sistema locale di riferimento nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &A_4 \equiv A\,; \qquad A_2 \equiv A^*\,; \\ &A_1 \equiv \text{punto generico di } \pi\,; \\ &A_3 \equiv \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad \text{di } \pi^*\,; \\ &E \equiv \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad \text{dello spazio.} \end{aligned}$$

In un tale sistema di riferimento Σ e Σ^* si rappresentano rispettivamente con sviluppi locali del seguente tipo:

$$\frac{x_3}{x_4} = l_{11}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + 2l_{12}\frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + l_{22}\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^2 + \ldots \tag{1}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = l_{33}\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 + 2l_{34}\frac{x_3}{x_2}\frac{x_4}{x_2} + l_{44}\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^2 + \ldots \tag{2}$$

Gli invarianti connessi alla coppia considerata di elementi del 2° ordine dovranno essere formati con le quantità l_{hk}. Per calcolarli basta osservare che i punti A_1 e A_3 possono ancora variare nei piani π e π^* e il punto E può variare ad arbitrio: una tale variazione del sistema di riferimento si traduce in una sostituzione lineare del seguente tipo sulle coordinate x_i:

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{33}x_3 \\ x_4' &= a_{41}x_1 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(1) *Un nuovo invariante proiettivo di contatto di due superficie* « Boll. Un. Mat. It. », 1934. n. 1, pp. 45-49.

(2) *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Kurven und Flächen beziehen* « Schlömilchs Zeitschr. für Math. u. Phys. », 36, 1891, pp. 56-60.

(3) *Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende charakteristische Eingenschaften der linearen Punkttransformationen* « Ibid. », 36, 1891, pp. 206-213.

dove le a_{hk} dipendono dalla scelta dei nuovi punti A_1, A_3, E. Nel nuovo sistema Σ e Σ^* si rappresentano con sviluppi dello stesso tipo di (1) e (2) ma con nuovi coefficienti l_{hk}' che per effetto della sostituzione (3) risultano legati ai coefficienti l_{hk} dalle seguenti relazioni:

$$(4)\quad \begin{cases} a_{33}a_{44}l_{11} = a_{11}^2 l_{11}' + 2a_{11}a_{21}l_{12}' + a_{21}^2 l_{22}' \\ a_{33}a_{44}l_{12} = a_{11}a_{22}l_{12}' + a_{21}a_{22}l_{22}' \\ a_{33}a_{44}l_{22} = a_{22}^2 l_{22}' \end{cases}$$

e altre tre analoghe, scambiati fra loro gli indici 1 e 3, 2 e 4;

da queste si deduce che *è invariante il prodotto*

$$(5)\qquad I = (l_{11}l_{22} - l_{12}^2)(l_{33}l_{44} - l_{34}^2)$$

e che ogni altro invariante formato con le l_{hk} è funzione di questo.

Per quel che riguarda il significato geometrico-proiettivo, osserviamo che I è già completamente definito dalla configurazione costituita dalle coppie delle tangenti principali in A e A^* aventi le equazioni:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ l_{11}x_1^2 + 2l_{12}x_1x_2 + l_{22}x_2^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ l_{33}x_3^2 + 2l_{34}x_3x_4 + l_{44}x_4^2 = 0, \end{cases}$$

e dagli elementi del 2° ordine delle curve intersezioni di Σ e Σ^* rispettivamente coi piani π^* e π, aventi le equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dfrac{x_3}{x_4} = l_{22}\left(\dfrac{x_2}{x_4}\right)^2 + \ldots, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ \dfrac{x_1}{x_2} = l_{44}\left(\dfrac{x_4}{x_2}\right)^2 + \ldots; \end{cases}$$

infatti applicando la (3) si vede che anche in questo caso i nuovi coefficienti l_{hk}' sono legati agli l_{hk} dalle relazioni (4). Un eventuale significato geometrico-proiettivo dovrebbe pertanto potersi trovare solo per mezzo di tale configurazione, ma, circoscritta così la quistione, ci è parso che non potesse avere soluzioni di una certa semplicità.

Assegneremo invece il significato *metrico* di I [1]. A tale scopo conviene passare dal precedente sistema locale di coordinate proiettive a un sistema locale di *coordinate cartesiane ortogonali* che sceglieremo nel seguente modo:

$$\text{origine} \equiv A\,; \qquad \text{asse } y \equiv AA^*; \qquad \text{piano } xy \equiv \pi\,;$$

[1] Supposto che A e A^* siano due punti proprii.

gli assi x e z restano determinati di conseguenza (gli orientamenti sono arbitrari).

Dette x, y, z le coordinate non omogenee nel sistema cartesiano prescelto, Σ e Σ^* si rappresenteranno rispettivamente con sviluppi locali dei seguenti tipi:

$$z = \lambda_{11}x^2 + 2\lambda_{12}xy + \lambda_{22}y^2 + \ldots \tag{6}$$

$$x = \mu z + \mu_{11}z^2 + 2\mu_{12}z(y-h) + \mu_{22}(y-h)^2 + \ldots \tag{7}$$

dove: $h = \text{dist.}(AA^*)$, $\mu = \text{ctg}\,\omega$, essendo ω *l'angolo dei piani* π, π^*.

Ponendo: $x = \dfrac{x_1'}{x_4'}$, $y = \dfrac{x_2'}{x_4'}$, $z = \dfrac{x_3'}{x_4'}$ le nuove coordinate cartesiane risultano legate alle precedenti coordinate proiettive dalla sostituzione:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \mu a_{33}x_3 \\ x_2' = a_{21}x_1 + hx_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{33}x_3 \\ x_4' = a_{41}x_1 + x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

dove le a_{hk} dipendono dalla scelta di A_1, A_3, E nel vecchio sistema. Attraverso tale sostituzione i coefficienti degli sviluppi (6), (7) risultano legati a quelli degli sviluppi (1) e (2) da certe relazioni, da cui, tenuto conto della (5) segue che:

$$I = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2)(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2)h^4.$$

Ora dette K e K^* le *curvature totali* di Σ e Σ^* in A e A^* si ha immediatamente:

$$K = 4(\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2), \qquad K^* = 4\,\frac{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2}{(1+\mu^2)^2};$$

e quindi tenuto presente che $\mu = \text{ctg}\,\omega$, si ottiene per I la seguente espressione:

$$I = \frac{1}{16}KK^*\frac{h^4}{\text{sen}^4\,\omega}, \tag{8}$$

la quale fornisce per I il seguente significato metrico:

« *L'invariante* I, *a meno di un fattore numerico, è uguale al prodotto delle curvature principali delle due superficie nei punti considerati, per la quarta potenza del rapporto fra la distanza dei due punti e il seno dell'angolo formato dai due piani tangenti in quei punti alle due superficie* ».

Per vedere ora come l'invariante I si connetta alla teoria delle congruenze di rette, consideriamo una tale congruenza di cui Σ e Σ^* siano le *falde focali* (cosicchè la tangente AA^* sarà un raggio della congruenza) e corrispondentemente calcoliamo in nuovo modo l'invariante I. Supponiamo Σ e Σ^* rappresentate parametricamente in coordinate proiettive omogenee, in modo che i punti A e A^* corrispondano agli stessi valori dei parametri: seguendo E. J. WILCZYNSKI [1], con opportuna scelta dei parametri e del fattore di proporzionalità possiamo ottenere che le coordinate $y_i(u, v)$ e $z_i(u, v)$ dei punti che descrivono Σ e Σ^* soddisfino a un sistema di equazioni del seguente tipo:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_v &= mz, \qquad z_u = ny, \\ y_{uu} &= ay + bz + cy_u + dz_v, \\ z_{vv} &= a'y + b'z + c'y_u + d'z_v. \end{aligned} \right.$$

Per calcolare l'invariante I in questo sistema di coordinate ci serviremo di una trasformazione che lo muti nel sistema locale usato inizialmente: indicando con $\bar{x}_i$ e x_i le coordinate correnti nei due sistemi, tale trasformazione (tenute presenti le (8)) si scrive così:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_1(\bar{x}\, y\, z\, z_v) \\ x_2 &= \sum_1^4 a_{2i}\bar{x}_i \\ x_3 &= a_3(\bar{x}\, z\, y\, y_u) \\ x_4 &= \sum_1^4 a_{4i}\bar{x}_i \end{aligned} \right.$$

dove le a_i, a_{hk} sono funzioni di u e v, legate dalle seguenti condizioni:

$$(11) \quad \sum_1^4 a_{2i}y_i = 0, \qquad\qquad (12) \quad \sum_1^4 a_{4i}z_i = 0.$$

Se in luogo delle coordinate correnti $\bar{x}_i$ poniamo nelle (9) le coordinate $y_i(u+h, v+k)$ di un punto di Σ prossimo ad A e sviluppiamo in serie di potenze di h e k tenendo presenti le (9), (11), (12) *e le loro conseguenze* ed eliminiamo poi i parametri h e k negli sviluppi trovati giungiamo allo sviluppo (1) con certe condizioni per i coefficienti, da cui segue:

$$\frac{a_3^2}{4}\frac{d}{m}\left(\sum_1^4 a_{4i}y_i\right)^2 = (l_{11}l_{22} - l_{12}^2)\,a_1^2\left(\sum_1^4 a_{2i}z_i\right)^2;$$

[1] *Sur la théorie générale des congruences* « Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique », Collection in 4°, (2), 3, 1911, 86 pages. Per le notazioni qui usate si veda il § 1 e in particolare pag. 16.

una formula analoga si ottiene da questa scambiando y con z, d con c', m con n e gli indici 1 e 2 con 3 e 4. E allora per la (5) si ottiene:

$$I = \frac{1}{16} \frac{c'd}{mn}.$$

Da questa espressione, confrontando il lavoro già citato di E. J. WILCZYNSKI (1), risulta che il nostro invariante coincide, a meno di un fattore numerico, con un invariante della congruenza considerato per la prima volta da E. WAELSCH (2) (3) con altri significati geometrici: risultato a cui potevamo anche pervenire confrontando l'espressione (8) del nostro invariante con un'espressione analoga data dal WAELSCH (senza dimostrazione) per l'inverso aritmetico del suo invariante (3).

Deformando proiettivamente la congruenza (in quanto ciò sia possibile), l'invariante considerato si mantiene inalterato o si muta nel suo inverso aritmetico secondo che si tratta di applicabilità proiettiva di 1ª o di 2ª specie (4).

(1) Op. cit. § 6 e in particolare pag. 39.

(2) *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlenkongruenzen und Flächen* « Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wiss. », 100, 1891, pp. 158-219.

(3) *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes* « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », 118, 1894, pp. 736-738.

(4) Cfr. A. TERRACINI, *Su alcuni elementi lineari proiettivi* « Annali di Pisa », (2) II, 1933, pp. 401-428; *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette* « Atti R. Ist. Veneto », t. XCIV, parte 2ª, 1934-35, pp. 75-86.