
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BASILIO MANIÀ

Il problema di Dirichlet discontinuo per la corona circolare

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.2, p. 98–103.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_98_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_2_98_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

**Il problema di Dirichlet discontinuo per la
corona circolare ⁽¹⁾.**

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si estende al caso di dati al contorno discontinui una formula data da GRONWALL per il problema di DIRICHLET continuo relativo alla corona circolare.*

1. Scopo di questa Nota è la risoluzione del problema di DIRICHLET per la corona circolare, con la stessa generalità con la quale questo problema è risolto per il cerchio, e la determina-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

zione esplicita di una soluzione per mezzo dei valori assegnati sulla frontiera del campo.

Ciò si ottiene facendo la seguente molto semplice osservazione.

Sieno C e C' due circonferenze, col centro nell'origine delle coordinate di un piano (x, y) , i cui raggi abbiano rispettivamente le lunghezze R, R' , con $R > R'$. Sopra C e C' sieno definite due funzioni $f(z), g(z)$, essendo z l'anomalia di un punto variabile sopra C o C' , ed esistano per queste distribuzioni di valori al contorno le soluzioni ⁽¹⁾ del problema di Dirichlet relativo ai cerchi limitati da C e da C' , e quindi anche relativamente alle regioni infinite esterne a C e a C' rispettivamente. Ciò posto, e indicate con (r, θ) le coordinate polari di un punto (x, y) variabile nel piano, sia $u_1(r, \theta)$ una soluzione del problema di Dirichlet relativo al cerchio limitato da C e alla funzione $f(z)$; sia poi $\bar{u}_1(r, \theta)$ la soluzione del problema di Dirichlet relativo alla corona circolare limitata da C e da C' per valori al contorno identicamente nulli su C e uguali a $u_1(R', \theta)$ sopra C' ⁽²⁾. Allora la funzione

$$v_1(r, \theta) = u_1(r, \theta) - \bar{u}_1(r, \theta)$$

risolve il problema di Dirichlet nella corona circolare per valori identicamente nulli su C' e dati da $f(z)$ sopra C . Analogamente si determina, con notazioni evidenti,

$$v_2(r, \theta) = u_2(r, \theta) - \bar{u}_2(r, \theta),$$

soluzione del problema di Dirichlet nella corona circolare per valori al contorno identicamente nulli su C e uguali a $g(z)$ sopra C' , e la soluzione del problema coi valori al contorno assegnati è data da

$$v(r, \theta) = v_1(r, \theta) + v_2(r, \theta).$$

⁽¹⁾ Qui si intendono le soluzioni *in senso esteso*. Data una distribuzione di valori $f(z)$ sopra la circonferenza C , si dice che una funzione $\varphi(x, y)$ risolve *in senso esteso* il problema di DIRICHLET per l'interno (esterno) di C e per la distribuzione di valori al contorno assegnata, se $\varphi(x, y)$ è armonica nell'interno (esterno) di C , e per quasi tutti i punti P_0 di C esiste ed è uguale a $f(z)$ il limite di $\varphi(x, y)$ al tendere di (x, y) a P_0 , *nell'interno di un angolo col vertice in P_0 e i lati non tangenti a C* . Si veda L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, 1928, p. 375 e segg., o G. C. EVANS, *The logarithmic potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems*, 1927, p. 39.

⁽²⁾ Per ciò che riguarda il problema di DIRICHLET continuo per la corona circolare si veda p. es. L. TONELLI, loc. cit., p. 399 e segg., o T. H. GRONWALL, *Some special boundary problems in the theory of harmonics functions* (« Bull. of the Am. Math. Soc. », XIX (1913), pp. 227-233).

2. Passiamo ora a determinare analiticamente la soluzione $v(r, \theta)$, e supponiamo da prima che $f(z)$ e $g(z)$ sieno due funzioni integrabili secondo LEBESGUE nell'intervallo $(0, 2\pi)$, e ne sieno

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos z + b_1 \sin z) + \dots + (a_n \cos nz + b_n \sin nz) + \dots,$$

$$\frac{1}{2} a_0' + (a_1' \cos z + b_1' \sin z) + \dots + (a_n' \cos nz + b_n' \sin nz) + \dots,$$

le corrispondenti serie di FOURIER.

Allora la funzione

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{r}{R} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \dots + \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \dots = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(z - \theta)} f(z) dz \end{aligned}$$

è armonica nell'interno di C e quasi da per tutto sopra C ha per limite $f(z)$, al tendere di (r, θ) a un punto di C lungo una linea che non sia tangente a C ⁽¹⁾.

La serie di Fourier relativa alla funzione $u_1(R', z)$ è

$$\frac{1}{2} a_0 + \frac{R'}{R} (a_1 \cos z + b_1 \sin z) + \dots + \left(\frac{R'}{R}\right)^n (a_n \cos nz + b_n \sin nz) + \dots,$$

e quindi la funzione $\bar{u}_1(r, \theta)$ del n.º precedente è determinata in modo unico ed è data dalla serie ⁽²⁾

$$\bar{u}_1(r, \theta) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{\log q} \log \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R'}{r}\right)^n - q^n \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

con $q = R':R$, la quale è uniformemente e assolutamente convergente nella corona circolare, frontiera compresa.

Di qua segue, con le notazioni del n.º precedente,

$$\begin{aligned} v_1(r, \theta) &= \frac{1}{2} a_0 \frac{\log R' - \log r}{\log q} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^n - \frac{\left(\frac{R'}{r}\right)^n - q^n \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n \right] (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \\ &= \frac{1}{2} a_0 \frac{\log R' - \log r}{\log q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^n - q^n \left(\frac{R'}{r}\right)^n}{1 - q^{2n}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

(1) Vedi p. es. L. TONELLI, loc. cit., o G. C. EVANS, loc. cit..

(2) Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 400.

e questa serie è convergente ovunque nella corona circolare, eccettuati al più i punti di C .

Analogamente è

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0' + \frac{R'}{r} (a_1' \cos \theta + b_1' \sin \theta) + \dots + \left(\frac{R'}{r}\right)^n (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta) + \dots = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R'^2}{R'^2 + r^2 - 2R'r \cos(z - \theta)} g(z) dz \quad (1);$$

$$\bar{u}_2(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0' \frac{\log R' - \log r}{\log q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^n - q^n \left(\frac{R'}{r}\right)^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta);$$

$$v_2(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0' \frac{\log r - \log R}{\log q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R'}{r}\right)^n - q^n \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - q^{2n}} (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta).$$

Si conclude, quindi, che

$$v(r, \theta) = \left\{ \frac{a_0 \log R' - a_0' \log R}{2 \log q} + \frac{a_0' - a_0}{2 \log q} \log r \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{a_n - a_n' q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R}\right)^n + \frac{a_n' - a_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r}\right)^n \right] \cos n\theta + \right. \\ \left. + \left[\frac{b_n - b_n' q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R}\right)^n + \frac{b_n' - b_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r}\right)^n \right] \sin n\theta \right\},$$

e risulta così dimostrata, per il caso di $f(z)$ e $g(z)$ integrabili secondo Lebesgue, una formula già nota per il caso di $f(z)$ e $g(z)$ continue ⁽²⁾.

3. Il metodo precedente si può applicare anche se le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ non sono integrabili, ma sono quasi da per tutto sulle rispettive circonferenze le derivate rispetto all'anomalia α di due funzioni $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$ integrabili secondo Lebesgue nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Indicate ora con

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) + \dots + (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) + \dots,$$

$$\frac{1}{2} a_0' + (a_1' \cos \alpha + b_1' \sin \alpha) + \dots + (a_n' \cos n\alpha + b_n' \sin n\alpha) + \dots,$$

(1) Vedi G. C. EVANS, loc. cit., pag. 86 e segg..

(2) Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 400.

le serie di Fourier di $\varphi(z)$ e di $\psi(z)$, si può porre ⁽¹⁾

$$u_1(r, \theta) = \frac{r}{R} (-a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta) + \dots + \left(\frac{r}{R}\right)^n (-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta) + \dots$$

e quindi

$$u_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R'}{r}\right) - q^n \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n (-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta).$$

$$v_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^n - q^n \left(\frac{R'}{r}\right)^n}{1 - q^{2n}} (-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta).$$

Analogamente

$$u_2(r, \theta) = \frac{R'}{r} (-a_1' \sin \theta + b_1' \cos \theta) + \dots + \left(\frac{R'}{r}\right)^n (-na_n' \sin n\theta + nb_n' \cos n\theta) + \dots$$

e quindi

$$u_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^n - q^n \left(\frac{R'}{r}\right)^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{R}\right)^n (-na_n' \sin n\theta + nb_n' \cos n\theta).$$

$$v_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R'}{r}\right)^n - q^n \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - q^{2n}} (-na_n' \sin n\theta + nb_n' \cos n\theta).$$

Se ne conclude che

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= v_1(r, \theta) + v_2(r, \theta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left[\frac{a_n - a_n' q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R}\right)^n + \frac{a_n' - a_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r}\right)^n \right] n \sin n\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{b_n - b_n' q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{r}{R}\right)^n + \frac{b_n' - b_n q^n}{1 - q^{2n}} \left(\frac{R'}{r}\right)^n \right] n \cos n\theta \right\}. \end{aligned}$$

Si vede, dunque, che se indichiamo con $V(r, \theta)$ la soluzione del problema di Dirichlet per i valori al contorno $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, ottenuta col metodo del n.º precedente, la soluzione $v(r, \theta)$ relativa ai valori $f(z)$ e $g(z)$, che ora abbiamo determinata, è data da

$$v(r, \theta) = \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

(1) Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 398.

4. Osserviamo che quanto abbiamo detto al n.° 1 è indipendente dalla forma del campo considerato, e quindi se si ha, ad esempio, un campo limitato da $n + 1$ curve continue chiuse, e se per esso si sa risolvere il problema di Dirichlet con valori al contorno continui, si sa anche risolvere il problema di Dirichlet con dati al contorno discontinui con la stessa generalità con la quale il problema è risolubile per un campo limitato da una sola curva continua chiusa.

5. Il problema di Dirichlet discontinuo per la corona circolare si può risolvere anche senza far ricorso alla soluzione per il problema continuo, come ho dimostrato in due mie Note lincee dove ho risolto la questione per uno spazio a un numero finito qualunque di dimensioni.
