BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIETRO BURGATTI

Qualche nuovo sviluppo del calcolo vettoriale intrinseco

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 133–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Qualche nuovo sviluppo del Calcolo vettoriale intrinseco.

Conferenza del prof. PIETRO BURGATTI
tenuta nell'Istituto Matematico della R. Università di Bologna.

In un recente pregevole libro del GROSSMANN sulla statica ho letto questa affermazione: « il Calcolo vettoriale è il linguaggio naturale della meccanica ». Mi fa piacere vedere che altri ripeta con voce autorevole ciò che in Italia da tempo é stato detto e dimostrato; ma Egli sarebbe stato ancor più nel vero se avesse aggiunto che è anche il linguaggio naturale della fisica e di gran parte della geometria. Questa verità non è generalmente riconosciuta, ma verrà tempo, io credo, che si riconoscerà.

Si riconoscerà quando il Calcolo vettoriate intrinseco, che già nello spazio ordinario, per la felice sistemazione fattane da BURALI-FORTI e MARCOLONGO ed altri, si presta mirabilmente ad ogni genere di ricerca, avrà raggiunto in seguito a successive estensioni e perfezionamenti una pari sistemazione negli spazi o varietà a un numero qualunque di dimensioni. Se ciò non è ancora avvenuto si deve a varie circostanze.

In particolare potrà produrre a molti impressione sfavorevole il fatto che il Calcolo vettoriale sia rimasto indietro rispetto al Calcolo tensoriale, che tende con altri mezzi a raggiungere in certi campi lo stesso fine. Questo fatto è dovuto principalmente al trionfo della relatività generale. Dopo lo svilupqo di questa teoria fatta da EINSTEIN col sussidio del Calcolo di RICCI e LEVI-CIVITA (che prima pochissimi conoscevano: io ero forse il solo che l'insegnassi nel 1900 in un mio corso a Roma) tutti si diedero a studiarlo, e molti, fra i quali matematici geniali, ne cercarono estensioni, perfezionamenti e applicazioni. I cultori del Calcolo vettoriale rimasero in pochi e sono pochi tuttora, perciò non v'è da stupirsi che si progredisca lentamente, e che ad esso si presti poca attenzione da parte di altri matematici.

Io non intendo in questa conferenza, e non ne avrei il tempo, passare in rassegna ciò che è stato fatto sinora da BURALI-FORTI e BOGGIO, dai loro scolari e più di recente da MANARINI, e il molto che c'è ancora da fare per dare al Calcolo vettoriale intrinseco la maggiore estensione e semplicità possibile, onde adattarlo con facilità alle svariate ricerche moderne. Mi limito a indicare una particolare via di estensione feconda, che permette tra l'altro di trattare con grande semplicità e in maniera quasi intuitiva importanti questioni o teorie che a primo aspetto possono sembrare riluttanti all'impiego di questo Calcolo.

L'ispirazione m'è venuta da una nuova lettura delle celebri ricerche di VOLTERRA sulle funzioni di linee e di spazi, compendiate dallo stesso Autore in alcune delle sue ultime conferenze. Perciò, sviluppando brevemente il mio soggetto, mi terrò alquanto vicino al VOLTERRA; non già per rifare ciò ch'Egli ha fatto, ma per mettere alla prova i nuovi concetti e algoritmi in un campo noto a tutti o a molti dei miei uditori, e permetter loro raffronti che mostrino la verità di quanto ho dianzi affermato.

1. Comincio a considerare nell'ordinario spazio euclideo S_3 luogo dei punti P un campo vettoriale $\mathbf{u}(P)$ che ammette in ogni punto il rot $\mathbf{u}$. Siano dP e δP due spostamenti infinitesimi (vettori) e indipendenti di P; $d\mathbf{u}$ e $\delta\mathbf{u}$ i corrispondenti incrementi (differenziali) del vettore $\mathbf{u}$.

Sussiste in ogni P e per ogni coppia di spostamenti la formula nota

$$(1)\quad \operatorname{rot}\mathbf{u}\times dP \wedge \delta P = d\mathbf{u}\times\delta P - \delta\mathbf{u}\times dP = d(\mathbf{u}\times\delta P) - \delta(\mathbf{u}\times dP),$$

che può anche servire alla definizione di rot $\mathbf{u}$.

Questa formula è importante; si può dire ch'essa *è l'espressione differenziale del celebre teorema di Stockes.* Invero, considerando una linea chiusa (L) e un diaframma qualunque (σ) limitato da (L) avente normale $\mathbf{n}$ in ogni suo punto; ed osservando che se dP e δP sono spostamenti tangenziali a (σ) si ha $dP \wedge \delta P = \mathbf{n}d\sigma$ ($d\sigma$ elemento d'arco); integrando la (1) sopra a (σ), il secondo membro, mediante un'opportuna integrazione per parti, diventa la circolazione del vettore $\mathbf{u}$ lungo (L); talchè risulta

$$(1')\qquad \int_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{n}d\sigma = \int_L \mathbf{u}\times dM,$$

essendo M il generico punto di (L); che è appunto il *teorema di Stockes.*

Il secondo membro è un numero che, dato $\mathbf{u}$, dipende solo da (L); ossia è una *funzione di linea,* detta da VOLTERRA di *1° grado* (tutte le funzioni di linea di 1° grado sono di questa forma); onde si scriverà

$$\int_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{n}d\sigma = F[L].$$

Per manifesta analogia rot $\mathbf{u} \times \mathbf{n} d\sigma$ si dirà il *differenziale di* F[L] *rispetto alla direzione* **n** scrivendo (1)

$$\text{rot}\, \mathbf{u} \times \mathbf{n} d\sigma = dF[L] = d\mathbf{u} \times \delta P - \delta \mathbf{u} \times dP$$

od anche

$$\text{rot}\, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \frac{dF[L]}{d\sigma} = \frac{d\mathbf{u} \times \delta P - \delta \mathbf{u} \times dP}{d\sigma}. \tag{2}$$

Il secondo membro è detto la *devivata areale di* F[L] *rispetto alla direzione* **n**. Essa risulta un numero funzione di punto, ed è anche uguale al *bidifferenziale di* **u** (che così può denominarsi il secondo membro della (1)) diviso per $d\sigma$.

Proseguendo nelle analogie, porremo

$$\frac{dF[L]}{d\sigma} = \text{grad}\, F[L] \times \mathbf{n}, \tag{3}$$

onde si avrà

$$\text{rot}\, \mathbf{u} = \text{grad}\, F[L]. \tag{3'}$$

Essendo identicamente div rot $\mathbf{u} = 0$, si ha la condizione d'integrabilità

$$\text{div grad}\, F[L] = 0. \tag{4}$$

2. Siano ora $\varphi(P)$ e $\mathbf{u}(P)$ uno scalare e un vettore legati dalla relazione

$$\text{grad}\, \varphi = \text{rot}\, \mathbf{u}. \tag{5}$$

Applicando una volta l'operatore *div* e un'altra l'operatore *rot*, si ha

$$\text{div grad}\, \varphi = 0, \quad \text{rot rot}\, \mathbf{u} = 0;$$

perciò φ è armonica. Nel piano rot **u** ha la forma i grad ψ, ove i è l'operatore che fa girare i vettori di 90° nel piano; perciò la (5) nel piano ha la forma

$$\text{grad}\, \varphi = i\, \text{grad}\, \psi, \tag{5'}$$

che è la condizione di monogeneità della funzione $\varphi + i\psi$; onde φ e ψ si dicono *coniugate.*

Per estensione nel S_3, poichè la (5) corrisponde alla (5'), si potrebbe dire che la coniugata di φ è il vettore **u**. Ma questo modo di estensione non pare il più fecondo. Geniale invece e feconda è l'estensione data da Volterra. Qui viene immediatamente.

In virtù della (3'), la (5) diventa

$$\text{grad}\, \varphi = \text{grad}\, F[L],$$

e quindi

$$\text{grad}\, \varphi \times \mathbf{n} = \text{grad}\, F[L] \times \mathbf{n}$$

ossia

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{dF[L]}{d\sigma}, \tag{6}$$

essendo $d\sigma$ normale a **n**. È l'analoga della nota relazione nel piano

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{d\psi}{ds};$$

perciò *la funzione di linea* F[L] *è da dirsi la coniugata di* φ(P).

3. Questa è l'estensione che si presta, come ha fatto vedere il VOLTERRA, alla generalizzazione del concetto di monogeneità riguardo alle funzioni di linea. Introducendo le funzioni complesse di linea (di 1° grado)

$$F[L]=F_1[L]+iF_2[L],\quad \Phi[L]=\Phi_1[L]+i\Phi_2[L]$$

il VOLTERRA le chiama *isogene* se il rapporto delle derivate $\frac{dF[L]}{d\sigma}$ e $\frac{d\Phi[L]}{d\sigma}$ è indipendente dall'orientazione **n** di $d\sigma$. Col nostro algoritmo esprimiamo che

$$\frac{\operatorname{grad} F\times \mathbf{n}}{\operatorname{grad}\Phi\times\mathbf{n}}=\frac{(\operatorname{grad} F_1+i\operatorname{grad} F_2)\times\mathbf{n}}{(\operatorname{grad}\Phi_1+i\operatorname{grad}\Phi_2)\times\mathbf{n}}$$

è indipendente da **n**. Occorre perciò che sia

$$\operatorname{grad} F_1+i\operatorname{grad} F_2=(a+ib)(\operatorname{grad}\psi_1+i\operatorname{grad}\psi_2).$$

Moltiplicando vettorialmente per grad Φ_1 e uguagliando le parti reali e le immaginarie, si ottiene

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} F_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_1=-b\operatorname{grad}\Phi_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_1\\ \operatorname{grad} F_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_1=a\operatorname{grad}\Phi_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_2;\end{gathered}$$

e analogamente con la moltiplicazione per grad Φ_2

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} F_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_2=a\operatorname{grad}\Phi_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_2\\ \operatorname{grad} F_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_2=b\operatorname{grad}\Phi_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_2;\end{gathered}$$

dal cui paragone si trae

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} F_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_1=\operatorname{grad} F_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_2\\ \operatorname{grad} F_2\wedge\operatorname{grad}\Phi_1=-\operatorname{grad} F_1\wedge\operatorname{grad}\Phi_2;\end{gathered} \tag{7}$$

che esprimono le condizioni di *isogeneità*.

Varie altre conseguenze si potrebbero ottenere, ma su ciò basterà. La semplicità che assume la teoria così trattata è manifesta.

4. Il VOLTERRA con mirabile intuito ha esteso le sue ricerche nello spazio S_n ($n > 3$) introducendo il concetto più generale di funzioni di spazi. Volendo noi continuare nella via dianzi tracciata, occorre estendere il Calcolo vettoriale agli spazi euclidei a n dimensioni ($n > 3$). L'estensione non è immediata nè facile; perchè, se si prende come modello il Calcolo vettoriale nell'S_3 (cosa che quasi s'impone dapprincipio, essendo come s'è detto quanto di meglio si possa desiderare), si fa bensì cosa in parte buona e utile (come si vede nei lavori di BURALI-FORTI e BOGGIO principalmente) ma non sufficiente; ossia, non si ottiene uno strumento di vasta portata adatto a tutte le applicazioni desiderabili. Ciò proviene dal fatto che l'S_3 è un ambiente particolare, direi anzi eccezionale rispetto agli spazi generali S_n; in esso tutto si può svolgere col solo concetto di vettore e di operazioni sul vettore. Orbene, non è detto a priori che ciò debba essere possibile per un S_n qualunque, quando s'abbia di mira un vasto campo di applicazioni (e se fosse possibile, potrebbe condurre a grandi complicazioni).

Già il MANARINI, accortosi di questo fatto, si è valso, per ottenere un'estensione sempre più feconda del Calcolo in discorso nel S_n, del concetto di *plurivettore* già introdotto con altre vedute dai cultori del Calcolo tensoriale. Qui, riguardo ai miei fini, ricorderò quanto segue.

Due vettori in un ordine stabilito definiscono tre elementi che caratterizzano un *bivettore semplice*, e cioè un S_2 lineare, detto *giacitura*; un *senso* di questa corrispondente all'ordine prestabilito, e un numero *o modulo* dato dall'area del parallelogramma costruito sui vettori. In generale un ente definito da questi tre elementi è detto un *bivettore, semplice* o *multiplo* secondo che è rappresentabile o no con una coppia di vettori. In quest'ultimo caso può essere considerato come la somma (opportunamente definita) di bivettori semplici. Il suo simbolo sarà $\underset{2}{\mathbf{u}}$.

Più generalmente un S_p lineare con un senso (giacitura) insieme a un numero positivo (modulo) caratterizzano con *plurivettore d'ordine* p, ossia un p-*vettore,* detto *semplice* se è rappresentabile con vettori in numero di p, *multiplo* nel caso contrario, ed allora può considerarsi come una somma (opportunamente definita) di p-vettori semplici. Il suo simbolo sarà $\underset{p}{\mathbf{u}}$.

Si può definire in modo intrinseco il prodotto scalare di due plurivettori dello stesso ordine; lo si rappresenta col solito simbolo $\underset{p}{\mathbf{u}} \times \underset{p}{\mathbf{v}}$. Prendendo un'ennupla di versori fondamentali $(i_1 i_2 \ldots i_n)$

le componenti cartesiane di $\underset{p}{\mathbf{u}}$ sono in numero di $\binom{n}{p}$. La somma dei prodotti delle componenti omologhe di $\underset{p}{\mathbf{u}}$ e $\underset{p}{\mathbf{v}}$ è nella rappresentazione cartesiana il prodotto scalare.

Il plurivettore $\underset{n-p}{\mathbf{u}}$ è detto il *supplementare* di $\underset{p}{\mathbf{u}}$ quando, avendo lo stesso modulo, le loro giaciture S_{n-p} e S_p sono ortogonali e $S_p + S_{n-p} \equiv S_n$ ha il senso stabilito del S_n. Si dimostra che questi due plurivettori hanno le stesse componenti rispetto all'ennupla fondamentale, e che in un prodotto scalare l'uno può essere sostituito dall'altro. Quando $\underset{p}{\mathbf{u}}$ è rappresentato (e rappresentabile) coi vettori $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_p$ sarà indicato col simbolo $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_p]$ (parentesi quadra).

Ciò posto, la formula (1) ha significato anche in $S_n (n > 3)$ scrivendola così:

$$\text{rot}\,\mathbf{u} \times [dP,\ \delta P] = d\mathbf{u} \times \delta P - \delta\mathbf{u} \times dP, \tag{8}$$

ove qui $[dP,\ \delta P]$ è il bivettore definito dai due spostamenti, e rot $\mathbf{u}$ è pure bivettore $\left(\text{ha } \binom{n}{2} \text{ componenti}\right)$. Il corrispondente teorema di Stockes acquista la forma

$$\int_\sigma \text{rot}\,\mathbf{u} \times \underset{n-2}{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_L \mathbf{u} \times dM,$$

ove (σ) è una varietà V_2 limitata da (L) e $\underset{n-2}{\mathbf{n}}$ l'$(n-2)$-versore (cioè unitario) normale a (σ) in un generico punto di (σ) (in modo che $\underset{n-2}{\mathbf{n}}\, d\sigma$ è il supplementare di $[dP,\ \delta P]$).

Ne consegue ancora, come precedentemente,

$$\text{rot}\,\mathbf{u} \times \underset{n-2}{\mathbf{n}} = \frac{dF[L]}{d\sigma}, \quad \text{rot}\,\mathbf{u} = \text{grad}\, F[L]; \tag{9}$$

qui $(n > 3)$ grad $F[L]$ è bivettore. Nel S_3, a cagione che $[dP,\ \delta P]$ può sostituirsi col prodotto vettoriale diventando così un vettore (il supplementare), anche rot $\mathbf{u}$ e grad $F[L]$ sono da interpretarsi come vettori (hanno 3 componenti).

Ma passiamo ad una ulteriore estensione. Nel S_n sia $\underset{p}{\mathbf{u}}$ un bivettore funzione del punto P (i suoi elementi variano con continuità da punto a punto). Indichiamo con d_1P, d_2P, d_3P tre spostamenti indipendenti di P (non nello stesso S_2) e con $d_1\underset{2}{\mathbf{u}}$, $d_2\underset{2}{\mathbf{u}}$, $d_3\underset{2}{\mathbf{u}}$ i corrispondenti incrementi (differenziali) di $\underset{2}{\mathbf{u}}$. Allora esiste un *trivettore* dipendente solo dal bivettore, che chiameremo il *rota-*

zionale di $\underset{2}{\mathbf{u}}$ indicandolo con $\mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}}$, tale che in ogni P e per qualunque terna di spostamenti ha luogo la relazione

$$\mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \times [d_1P,\ d_2P,\ d_3P] = \Sigma\, d_1\underset{2}{\mathbf{u}} \times [d_2P,\ d_3P] \tag{10}$$

somma estesa alle permutazioni cicliche di 1, 2, 3 (coi segni secondo la classe); ove $[d_1P,\ d_2P,\ d_3P]$ è il trivettore definito dai tre spostamenti e $[d_2P,\ d_3P]$ il bivettore definito da due.

È l'estensione della (1), ed è l'espressione differenziale di un altro più generale teorema di STOCKES.

Integrando sopra a una varietà V_3 limitata da una varietà chiusa V_2; ed osservando che il secondo membro si può scrivere nella forma

$$\Sigma\, d_1(\underset{2}{\mathbf{u}} \times [d_2P,\ d_3P]);$$

in maniera simile a ciò che si fa per la (1) si trova

$$\int_{V_3} \mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \times [d_1P,\ d_2P,\ d_3P] = \int_{V_2} \underset{2}{\mathbf{u}} \times [dM,\ \delta M],$$

ove dM e δM sono due spostamenti di M in V_2; che è appunto un'estensione indicata dal VOLTERRA del Teorema di STOCKES (altri Autori la ritrovarono molto tempo dopo).

Al trivettore degli spostamenti si può sostituire il suo supplementare $\underset{n-3}{\mathbf{n}}\, dV_3$, ove $\underset{n-3}{\mathbf{n}}$ è unitario normale alla V_3 in P e dV_3 l'elemento di volume. D'altra parte il secondo membro è una funzione di primo grado della varietà V_2, perciò si scriverà

$$\int_{V_3} \mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \times \underset{n-3}{\mathbf{n}}\, dV_3 = F[V_2].$$

Ne consegue per analogia ed estensione che

$$\mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \times \underset{n-3}{\mathbf{n}} = \frac{dF[V_2]}{dV_3} \tag{11}$$

è la derivata della funzione di spazio F[V_2] *rispetto alla* V_3 *e secondo l'orientazione di* $\underset{n-3}{\mathbf{n}}$. Risulta una funzione di punto. E continuando l'analogia si scriverà

$$\mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} \times \underset{n-3}{\mathbf{n}} = \mathrm{grad}\, F[V_2] \times \underset{n-3}{\mathbf{n}},\quad \mathrm{rot}\,\underset{2}{\mathbf{u}} = \mathrm{grad}\, F[V_2];$$

onde il gradiente d'una $F[V_2]$ è un trivettore funzione di punto.

Dalla (10) risulta subito che se si prende per $\underset{2}{\mathbf{u}}$ il bivettore $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ si ha per la (8)

$$\Sigma\, d_1 \{\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times [d_2P,\ d_3P]\} = \Sigma\, d_1 \{ d_2(\mathbf{u} \times d_3P) - d_3(\mathbf{u} \times d_2P)\} = 0,$$

e quindi

(12) $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 \qquad (n > 3).$$

Ne consegue per la (9) la condizione d'integrabilità

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} F[L] = 0.$$

Ora ben si vede come si possa continuare senza difficoltà nell'estensione. Se $\underset{q}{\mathbf{u}}$ è un q–vettore, esiste il $(q+1)$–vettore $\operatorname{rot}\underset{q}{\mathbf{u}}$ tale che, detti d_1P, $d_2P \dots d_{q+1}P$, $q+1$ spostamenti indipendenti di P (non nello stesso S_q), sussiste la relazione

(13) $$\operatorname{rot}\underset{q}{\mathbf{u}} \times [d_1P \dots d_{q+1}P] = \Sigma\, d_1\underset{q}{\mathbf{u}} \times [d_2P \dots d_{q+1}P]$$
$$= \Sigma\, d_1(\underset{q}{\mathbf{u}} \times [d_2P \dots d_{q+1}P]).$$

col significato ormai noto dei simboli. Questa è una nuova espressione differenziale di un altro teorema di STOCKES, che per brevità non scriverò.

Di qui, come di sopra, si dedurrà

$$\operatorname{rot}\underset{q}{\mathbf{u}} \times \underset{n-q-1}{\mathbf{n}} = \frac{dF[V_q]}{dV_{q+1}} = \operatorname{grad} F[V_q] \times \underset{n-q-1}{\mathbf{n}}$$

(13′) $$\operatorname{rot}\underset{q}{\mathbf{u}} = \operatorname{grad} F[V_q],$$

senza che occorrano ulteriori spiegazioni. In generale dunque il gradiente di una funzione di primo grado di varietà V_q è un $(q+1)$–vettore funzione di punto. È quasi ovvio che sussiste in generale l'identità (come la (12))

(14) $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underset{q}{\mathbf{u}} = 0,$$

e quindi la condizione d'integrabilità per la (13′)

(14′) $$\operatorname{rot}\operatorname{grad} F[V_q] = 0.$$

5. Per giungere al teorema fondamentale di VOLTERRA sulle funzioni coniugate basta considerare due plurivettori $\underset{r-1}{\mathbf{u}}(P)$ e $\underset{n-r-1}{\mathbf{u}}(P)$ rispettivamente dell'ordine $r-1$ e $n-r-1$ insieme ai loro rotazionali che sono rispettivamente dall'ordine r e $n-r$; indi porre la condizione che questi siano supplementari l'uno dell'altro. Ciò sarà espresso mediante l'uguaglianza

(15) $$\operatorname{rot}\underset{r-1}{\mathbf{u}} = \operatorname{rot}\underset{n-r-1}{\mathbf{u}},$$

perchè, passando alle coordinate, quest'equazione simbolica equivale appunto all'uguaglianza delle componenti ed è compatibile con la (14). Le giaciture S_r e S_{n-r} di questi due plurivettori supplementari sono ortogonali.

Consideriamo in S_r una varietà chiusa V_{r-1} e in S_{n-r} una V_{n-r-1}. In corrispondenza ai plurivettori $\underset{r-1}{\mathbf{u}}$ e $\underset{n-r-1}{\mathbf{u}}$ esistono per le cose dette le due funzioni di spazi o varietà $F[V_{r-1}]$ e $\Phi[V_{n-r-1}]$, perciò in base alle (15) e (13) si avrà

$$\operatorname{grad} F[V_{r-1}] = \operatorname{grad} \Phi[V_{n-r-1}]$$

od anche

$$\frac{dF[V_{r-1}]}{dV_r} = \frac{d\Phi[V_{n-r-1}]}{dV_{n-r}}, \tag{16}$$

dV_r e dV_{n-r} essendo elementi ortogonali. Questa è manifestamente l'estensione della (6); le due funzioni $F[V_{r-1}]$ e $\Phi[V_{n-r-1}]$ sono dette appunto dal Volterra *funzioni coniugate*; onde in un S_n ne esistono varie di queste coppie.

Si ha $r-1=n-r-1$ quando $n=2r$; perciò negli spazi con un numero pari di dimensioni ci sono funzioni di spazio coniugate di sè stesse. Tali le funzioni di linee di primo grado in un S_4.

Come si vede, qui col solo operatore *rot* da applicarsi ai plurivettori e col prodotto scalare ci si pone già in grado di svolgere in modo rapido e facile un'importante teoria.

Ora potrei continuare, se ne avessi il tempo, con altri sviluppi; ma quanto ho già detto parmi sufficiente a mostrare per quale altra via il Calcolo vettoriale intrinseco possa completarsi nell'estensione al S_n, al fine di costruire uno strumento di vasta portata e in pari tempo semplice, adatto alle svariate ricerche d'ordine generale. Liberando le teorie dalle questioni estranee e dalle complicazioni di calcolo e di simboli che nascono sovente dall'uso metodico delle coordinate, esse appariscono nel loro scheletro concettuale, e facilmente se ne scorgono o le comuni origini o gli stretti rapporti (1).

Appendice. — Credo interessante mostrare che in sostanza (a parte l'uso delle omografie ed iperomografie in altre ricerche di cui non ho fatto qui parola) tutto si può fare col solo operatore *rot*.

(1) Ricordo che l'autorevolissimo Weyl in « Raum, Zeit u. Materie », ha scritto: « Molti si saranno spaventati del diluvio di indici e formule di cui è inondato il pensiero direttivo della geometria infinitesimale (malgrado le oneste fatiche dell'A.). È spiacevole che ci si debba tanto affaticare intorno alle parti puramente formali, ed esser costretti a dar loro così gran posto; ma questo non si può evitare ». Io ed altri con me siamo invece persuasi che si può evitare pienamente.

Gli altri operatori usati *grad* e *div* non sono qualcosa di diverso da *rot*, quando questo sia definito in modo generale dalla formula (13).

Estendendo, per così dire, a ritroso la definizione (13) sino a $p = 0$, si trova

$$\operatorname{rot} \underset{0}{\mathbf{u}} \times dP = d\underset{0}{\mathbf{u}},$$

ove $\underset{0}{\mathbf{u}}$ è da intendersi una funzione scalare $f(P)$; cosicchè l'ordinario $\operatorname{grad} f$, che si definisce appunto con la formula $\operatorname{grad} f \times \times dP = df$, si identifica col $\operatorname{rot} \underset{0}{\mathbf{u}}$ o $\operatorname{rot} f$.

Nel S_3, detti $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ i versori della terna fondamentale e $u_{12} u_{23} u_{31}$ le componenti del bivettore semplice $\underset{2}{\mathbf{u}}$, il trivettore $\operatorname{rot} \underset{2}{\mathbf{u}}$ risulta rappresentato da

$$\left(\frac{\partial u_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x_3}\right)[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3],$$

ove $[\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3]$ è il triversore fondamentale; onde si può scrivere

$$\operatorname{mod} \operatorname{rot} \underset{2}{\mathbf{u}} = \frac{\partial u_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x_3}.$$

Ma $u_{12} u_{23} u_{31}$ sono uguali alle componenti $u_1 u_2 u_3$ del vettore $\mathbf{u}$ supplementare di $\underset{2}{\mathbf{u}}$; perciò il secondo membro è la divergenza di $\mathbf{u}$; dunque

$$\operatorname{mod} \operatorname{rot} \underset{2}{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Parimenti nel S_n, considerando un $(n-1)$-vettore semplice $\underset{n-1}{\mathbf{u}}$ le cui componenti in numero di $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$ siano $u_1 u_2 \ldots u_n$, e rammentando che queste sono anche le componenti del vettore $\mathbf{u}$ supplementare di $\underset{n-1}{\mathbf{u}}$, si ha come precedentemente

$$\operatorname{mod} \operatorname{rot} \underset{n-2}{\mathbf{u}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Dunque è esatto ciò che ho disopra asserito, e questo sta a mostrare quanta semplicità si possa raggiungere nel calcolo vettoriale generale.