Salvatore Cherubino

Sul rango delle matrici pseudonulle

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 143–149.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_143_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

PICCOLE NOTE

Sul rango delle matrici pseudonulle.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Messina).

Sunto. - *Si assegnano alcune limitazioni pel rango di una matrice pseudonulla e se ne fa applicazione alle aggiunte di ordine qualunque di una matrice non necessariamente pseudonulla.*

Nel cercare la dimostrazione di un teorema (1) sull'aggiunta di una matrice di ordine n, mi sono imbattuto in alcune osservazioni sulle matrici pseudonulle che mi sembrano non prive d'interesse e credo non siano ancora note (almeno in modo esplicito).

Dette osservazioni si ottengono rapidamente considerando, col prof. SCORZA (2), la *segnatura* di A, la quale caratterizza la *forma canonica* di A e, viceversa, ne è individuata.

Ciò nondimeno, deduciamo le nostre osservazioni anche dalla forma canonica, anzichè solo dalla segnatura, il che agevolerà la comprensione di questa Nota al lettore che non volesse ricorrere alla segnatura.

Dalle proprietà dimostrate se ne deducono altre relative alle aggiunte di ordine qualunque di una matrice A, non necessariamente pseudonulla.

Aggiungo poi una ulteriore osservazione, la quale fornisce una limitazione del rango di A pseudonulla, che può scriversi senz'altro quando sia data una potenza della forma canonica, pur non conoscendo la segnatura di A.

1. Considerando una matrice pseudonulla A di ordine n, se ρ è il suo rango e ν_j la nullità di A^j, si ha (3)

$$0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_\rho = n \tag{1}$$

(1) Che occorreva ad un'allieva dell'Università di Messina per impiegarlo nella sua tesi di laurea.

(2) *Corpi numerici ed Algebre* [Messina, Principato, 1921], p. 421 e segg.

(3) SCORZA G., loco cit. (2).

quindi

$$\nu_{\rho-1} \leqq n - 1, \quad \nu_{\rho-2} \leqq n - 2, \ldots, \quad \nu_1 \leqq n - \rho + 1$$

onde, se r_j è la caratteristica di A^j ed $r = r_1$ è quella di A, segue che

$$(2) \qquad n - r \leqq n - \rho + 1 \quad \text{ossia} \quad \rho \leqq r + 1$$

$$(3) \qquad n - r_j \leqq n - (\rho - j) \quad \text{ossia} \quad \rho \leqq r_j + j.$$

Inoltre

$$(4) \qquad \nu_{h-l} \leqq \nu_h - l$$

quindi

$$(4') \qquad r_h \leqq r_{h-l} - l.$$

Le disuguaglianze (2), (3), (4′) dànno le proposizioni:

Detta A *una matrice pseudonulla di rango* ρ:

a) *se la caratteristica di* A *è* r, *si ha* $\rho \leqq \mathrm{r} + 1$;

b) *se la caratteristica di* A^{j} *è* $\mathrm{r_j}$, *si ha* $\rho \leqq \mathrm{r_j} + \mathrm{j}$;

c) *fra le caratteristiche delle potenze* $\mathrm{A}^{\mathrm{h-l}}$, A^{h} *vale la disuguaglianza* $\mathrm{r_h} \leqq \mathrm{r_{h-l}} - \mathrm{l}$.

Poichè il rango di una matrice pseudonulla non nulla non può essere inferiore a 2, dalla a) si ha come corollario che:

d) *se una matrice è pseudonulla e di caratteristica uno, il suo rango è due.*

2. Volendo servirci della forma canonica di A, si ricordi che questa è una matrice, dello stesso ordine n di A, ad elementi tutti nulli meno certi r termini (se r è la caratteristica di A) della prima parallela a destra della diagonale principale, i quali sono tutti eguali all'unità. Fra questi r termini non nulli sono intercalati $0 \leq i < r$ zeri ([4]).

Diciamo I_r questa forma canonica ed osserviamo che la caratteristica, la nullità ed il rango di A e delle sue potenze coincidono, com'è ovvio, con i corrispondenti caratteri di I_r e delle sue potenze di egual esponente.

Il quadrato I_r^2 di I_r potrà possedere elementi non nulli solo nella seconda parallela a destra alla diagonale principale e ne possiederà proprio $r - 1$, cioè la caratteristica di A^2 sarà $r - 1$, solo se le r unità di I_r sono in linee consecutive (non sono intercalate da zeri) altrimenti ne possiederà di meno, cioè la caratteristica di A^2 sarà inferiore ad $r - 1$.

Il cubo I_r^3 di I_r può possedere elementi non nulli solo nella terza parallela a destra alla diagonale principale e questi saranno

([4]) La successione delle unità e degli zeri in detta linea è determinata, non importa qui dir come, dalla segnatura di A. Vedi loco cit. ([2]), p. 425.

in numero inferiore *almeno* di un'unità a quelli di I_r^2; saranno $r-2$ allora e solo che le r unità di I_r sono consecutive, nel qual caso sono in linee consecutive anche le $r-1$ unità di I_r^2 e le $r-2$ di I_r^3.

Così si può seguitare, e ne seguono le osservazioni del n. prec..

3. Dal ragionamento ora svolto segue che se $i=0$, cioè se le unità di I_r sono consecutive, lo sono quelle di tutte le potenze di I_r ed è necessariamente $\rho=r+1$.

Il numero i si calcola subito mediante la *segnatura* di A, che è il ρ-intiero $(t_1, t_2, \dots, t_\rho)$ in cui

$$t_j=\nu_j-\nu_{j-1}, \quad t_1=\nu_1.$$

Si ha senz'altro ([5])

$$i=(t_\rho-1)+(t_{\rho-1}-t_\rho-1)+\dots+(t_2-t_3-1)+\rho-2=t_2-1. \tag{5}$$

Ma $t_2=\nu_2-\nu_1=r_1-r_2$, dunque

$$i=r-r_2-1. \tag{6}$$

Ciò si ottiene facilmente anche ricorrendo alla forma canonica, anzichè alla segnatura. Consideriamo, invero, la riga s^{ma} di I_r e sia non nulla, sicchè al suo $(s+1)^{mo}$ posto vi sarà l'unità, mentre ogni altro elemento è zero. Se la colonna t^{ma} è anch'essa non nulla, essa possiederà l'unità al posto $(t-1)^{mo}$, mentre ogni altro elemento è zero. Il prodotto di queste due linee (che dà l'elemento di posto s, t in I_r^2) non sarà zero allora e solo che $t-1=s+1$, cioè quando $t=s+2$. Perciò, se la riga consecutiva alla s^{ma} è nulla, e allora soltanto, è certamente nulla, in I_r^2, tanto la riga $(s+1)^{ma}$ quanto la s^{ma}.

Ne segue che ogni interruzione nella catena delle unità di I_r fa diminuire di uno il numero delle unità di I_r^2. Cioè si ha appunto $r_2=r-1-i$, che coincide con la (6).

Poichè le successive potenze di I_r hanno caratteristiche decrescenti si è con ciò ottenuto che:

a) *se* i *è il numero delle interruzioni presentate da* $\mathrm{I_r}$ *nella catena delle sue unità, il rango di* A *non supera* $\mathrm{r}+1-\mathrm{i}$.

Il che, in base al calcolato valore di i, è dato pure dalla b) del n. 1, per $j=2$.

Abbiamo inoltre ottenuto che:

b) *se* $\mathrm{I_r}$ *non presenta interruzioni, cioè se la caratteristica* r *di* A *differisce di un'unità da quella del suo quadrato e solo allora la potenza* $\mathrm{A^j}$ *ha caratteristica* $\mathrm{r}-\mathrm{j}$ *ed il rango di* A *è* $\mathrm{r}+1$.

([5]) Scorza G., loco cit. ([4]).

Ricordando che:

$$t_j = \nu_j - \nu_{j-1} = r_{j-1} - r_j, \quad t_1 = \nu_1 = n - r$$

da cui segue che

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_\rho = n$$

si ha subito che se $\rho = r + 1$, è necessariamente

$$t_2 + \ldots + t_\rho = \rho - 1$$

quindi $t_2 = t_3 = \ldots = t_\rho = 1$. E viceversa.

E poichè [6]

(7) $$t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_\rho > 0$$

è ovvio che per avere $t_2 = t_3 = \ldots = t_\rho = 1$ occorre e basta soltanto avere $t_2 = 1$, cioè $r - r_2 = 1$. Con ciò si è dimostrato un'altra volta la b) e si può enunciare anche:

c) *il secondo intiero della segnatura di* A, *matrice pseudonulla, è uguale all'unità, con tutti i successivi, allora e solo che il rango di* A *eguaglia la sua caratteristica aumentata di uno.*

È ovvio che $r + i \leqq n - 1$, sicchè $2r - r_2 \leqq n$, onde se $2r > n$ è certo $r_2 > 0$, cioè:

d) *se la caratteristica di* A *supera la metà dell'ordine, il suo rango è certo maggiore di due.*

4. Consideriamo la potenza I_r^j, $j > 1$. Essa avrà r_j unità nella j^{ma} parallela alla diagonale principale e la riga s^{ma}, supposta non nulla, ha un elemento non zero solo al posto $(s + j)^{mo}$, mentre la verticale t^{ma}, se non è nulla, avrà l'unità al posto $(t - j)^{mo}$. Perchè queste due linee diano, in I_r^{2j}, un elemento non nullo al posto (s, t), occorre e basta che sia $t = s + 2j$.

Segue che se la riga $(s + j)^{ma}$ è nulla, nel quadrato di I_r^j sono nulle tanto la riga $(s + j)^{ma}$ che la riga s^{ma}, mentre quest'ultima, in I_r^j era supposta non nulla.

Si osservi ancora che, in I_r^{2j}, la riga s^{ma} risulta nulla anche quando $t = s + 2j > n$.

In ogni altro caso questa riga contiene un'unità sia in I_r^j che nel suo quadrato.

Diciamo $s_1, s_2, \ldots, s_{r_j}$, ordinatamente, le righe non nulle di I_r^j e sia s_{q_j} il massimo degli intieri s_h che danno $s_h + 2j \leqq n$. Allora solo alle righe $s_1, s_2, \ldots, s_{q_j}$ potranno corrispondere, nel quadrato

[6] SCORZA G., loco cit. [4]. Per la dimostrazione di queste (7) vedi lo stesso trattato del prof. SCORZA, p. 219.

di I_r^j, righe non nulle. È dunque $r_{2j} \leqq q_j$ ed inoltre $0 \leqq q_j \leqq r_j$, $s_{q_j} + 2j \leqq n$ ed infine $q_j + 2j \leqq n$.

Indichiamo con $i_j \geqq 0$ il numero delle righe nulle di I_r^j il cui posto eguaglia qualcuno degl'indici $s_1, s_2, \dots, s_{q_j}$ aumentato di j. È necessariamente $i_j \leqq q_j$ e risulterà

$$r_{2j} = q_j - i_j \leqq r_j - j. \tag{8}$$

Di qui, poichè $\rho \leqq r_{2j} + 2j$, si ha

$$\rho \leqq q_j - i_j + 2j.$$

Questa disuguaglianza, quando nella (8) valga il segno $<$, è più forte dell'altra $\rho \leqq r_j + j$. Essa è utile quando sia data I_r^j ma non la segnatura di A, quindi non si conosca I_r.

Si tenga anche presente che se $r_j \leqq j$, dovendo essere (n. 1) $0 \leqq r_{2j} \leqq r_j - j$, segue necessariamente che $r_{2j} = 0$ quindi che $\rho \leqq 2j$.

Abbiamo dunque che:

il rango ρ *della matrice* A *pseudonulla, oltre alle limitazioni del n. 1, soddisfa alle seguenti:*

a) *se la caratteristica* r_j *di* A^j *non supera l'esponente si ha* $\rho \leqq 2j$;

b) *detta* J_r *la forma canonica di* A, *si indichino con* $s_1, s_2, \dots, s_{r_j}$ *le righe non nulle di* J_r^j. *Se*

$$s_1 \leqq s_2 \leqq \dots \leqq s_{q_j} \leqq n - 2j; \quad n - 2j < s_{q_j+1} < \dots < s_{r_j}$$

e se i_j *è il numero delle righe nulle di* J_r^j *il cui posto è dato da qualcuno dei* $q_j \leqq r_j$ *intieri* $s_1 + j, \dots, s_{q_j} + j$, *si ha*

$$q_j - i_j = r_{2j}$$

quindi

$$\rho \leqq q_j - i_j + 2j.$$

c) *se* $q_j > i_j$, *il rango è certo maggiore di* 2j.

Ad es., data

$$I_r^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

si ha $r_2 = 3 > 2$, onde non si verifica il caso a). Ma si ha $q_2 = 2$, $i_2 = 2$, quindi $r_4 = 0$ e $\rho \leqq 4$. Col criterio b) del n. 1 si ha invece $\rho \leqq 3 + 2 = 5$.

La matrice sopra indicata è stata ottenuta quadrando

$$I_r = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

e questa, se non si vuol calcolarne la segnatura, dà $\rho \leq 5 + 1$, cioè se di A è nota la sola caratteristica si ha $\rho \leq 6$.

Il rango di I_r è appunto 4 e la segnatura è (2, 2, 2, 1).

5. Sia A una matrice non necessariamente pseudonulla, di ordine n e caratteristica $n - 1$, e sia A^* la sua aggiunta (ordinaria).

È noto che A^* è di caratteristica uno, quindi (n. 1) se A^* è pseudonulla è certo di rango due.

Si tenga presente che perchè una matrice sia pseudonulla occorre e basta (7) che abbia eguali a zero tutte le sue radici caratteristiche.

Ora, se B è una matrice di ordine n, le sue radici caratteristiche sono quelle dell'equazione in λ (equazione caratteristica di B)

$$f(\lambda) = |B - \lambda I| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1\lambda^{n-1} + \ldots - \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n$$

ove σ_j indica la somma dei determinanti dei minori principali di ordine j di B.

Segue che A possiede almeno una radice caratteristica nulla ed A^* ne possiede almeno $n - 1$. Ma inoltre

$$|A^* - \lambda I| = (-1)^n\lambda^{n-1} + (-1)^{n-1}\Sigma_1\lambda$$

ove Σ_1 è la somma degli elementi principali di A^* ossia dei determinanti dei minori principali di ordine $n - 1$ di A. Dev'esser dunque $\Sigma_1 = 0$, quindi che A possegga una seconda radice caratteristica nulla. E ciò evidentemente basta, onde:

a) *affinchè l'aggiunta (ordinaria) di una matrice* A *sia pseudonulla, necessariamente di rango due, occorre e basta che* A *possegga (almeno) due radici caratteristiche nulle.*

Sia $A^{(r)}$ l'aggiunta di ordine r di A cioè quella matrice di ordine $N = \binom{n}{r}$ i cui elementi sono i determinanti dei minori di ordine r estratti da A, presi col segno + o col — secondo che siano di classe pari o dispari. Questi elementi si dispongono in $A^{(r)}$

(7) Scorza G., loco cit. (2), p. 158.

in modo che nella stessa riga (o colonna) siano i determinanti dei minori estratti dalle stesse r colonne (o righe) di A e che nella diagonale principale di $A^{(r)}$ capitino i determinanti dei minori principali di A. L'aggiunta ordinaria A^* non è che quella di ordine $n-1$.

È noto ([8]) che le radici caratteristiche di $A^{(r)}$ sono i prodotti ad r ad r di quelle di A, sicchè $A^{(r)}$ è pseudonulla allora e solo che A possegga $n-r+1$ radici caratteristiche nulle.

È anche conosciuto ([9]) che se A è di caratteristica $s \geqq r$, quella di $A^{(r)}$ è $\binom{s}{r}$. Si può quindi (n. 1) enunciare che:

b) *se* A *è di caratteristica* $s \geqq r$ *ed* $A^{(r)}$ *è pseudonulla (cioè se* A *possiede almeno* $n-r+1$ *radici caratteristiche nulle) il rango di* $A^{(r)}$ *non supera* $\binom{s}{r}+1$.

Quindi anche:

e) *se* A *è di caratteristica* r, *onde quella di* $A^{(r)}$ *è uno, l'aggiunta* $A^{(r)}$ *è pseudonulla, necessariamente di rango due, allora e solo che* A *possieda almeno* $n-r+1$ *radici caratteristiche nulle (anzichè soltanto* $n-r$).

([8]) Cfr. C. C. Mac Duffee, *The theorie of Matrices* [Berlin, Springer, 1933], p. 87.

([9]) Nicoletti O., [« Atti Acc. Sc. Torino », vol. 37 (1901-02)], pp. 655-659. Vedi anche loco cit. ([8]).