Bollettino Unione Matematica Italiana

Basilio Manià

Sopra un teorema di Gauss

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 149–152.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_149_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Sopra un teorema di Gauss (1).

Nota di Basilio Manià (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostra il teorema di* Gauss *sul flusso dei campi newtoniani nel caso di una distribuzione volumetrica di massa per una superficie chiusa avente dei punti comuni con la massa generatrice del campo.*

1. È noto che, dato un campo newtoniano V, se S è una superficie chiusa soddisfacente a certe condizioni di regolarità e senza punti comuni con le masse generatrici del campo, il flusso Φ uscente da S è dato dalla formula

$$\Phi = \iint_S V_n dS = -4\pi M$$

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

dove M rappresenta la somma delle masse racchiuse dalla superficie S [1]. Questa proposizione, nota sotto il nome di *teorema di* GAUSS, non è più vera in generale se la superficie S ha dei punti in comune con le masse generatrici del campo.

Nel suo libro *Foundations of potential theory* il KELLOGG [2] osserva però che anche nel caso ora indicato il teorema di GAUSS è vero se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

a) se Σ è una qualunque superficie chiusa variabile, tendente ad S, la somma complessiva delle masse racchiuse da Σ tende alla somma delle masse racchiuse da S;

b) se S'' è una superficie chiusa variabile contenente S nel suo interno, il flusso attraverso ad S'' dovuto alle masse interne ad S varia con continuità al variare di S''; e se S' è una superficie chiusa interna ad S, il flusso attraverso ad S' dovuto alle masse esterne ad S varia pure con continuità al variare di S'.

Il KELLOGG nota pure che la prima condizione è certamente soddisfatta nel caso di una distribuzione volumetrica di massa con densità limitata, e che la seconda condizione si può verificare facilmente per la sfera ed altre superfici semplici.

Noi considereremo una superficie continua chiusa S per la quale esista una successione di pluriparallelepipedi completamente interni ad S

$$R_1', \quad R_2', \ldots, \quad R_k', \ldots$$

e una successione di pluriparallelepipedi contenenti S nel loro interno

$$R_1'', \quad R_2'', \ldots, \quad R_k'', \ldots$$

tali che le misure dei volumi

$$R_1'' - R_1', \quad R_2'' - R_2', \ldots, \quad R_k'' - R_k', \ldots$$

tendano a zero al tendere all'infinito di k.

Per una tale superficie S ci proponiamo di dimostrare qui che nel caso di una distribuzione volumetrica di massa con densità limitata non è necessario aggiungere nessuna condizione per la validità del teorema di GAUSS quando la superficie S ha dei punti comuni con le masse generatrici del campo. Precisamente ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

Se S *è una superficie chiusa per la quale il teorema di* GAUSS *è valido quando le masse generatrici del campo newtoniano non*

[1] Vedi, per esempio, O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, pp. 42-44.

[2] Loc. cit..

hanno punti comuni con essa, il teorema di GAUSS *vale per la superficie* S *anche nel caso di una distribuzione volumetrica di massa, con densità limitata, avente dei punti in comune con la superficie* S.

2. Indichiamo con μ la densità della distribuzione di massa, con M la massa totale, con $M^{(i)}$ la massa interna ad S, con $M^{(e)}$ la massa esterna ad S, con B un limite superiore per $|\mu|$, con V il volume occupato dalla massa (1). Allora le componenti X, Y, Z del campo sono date dalle formule

$$X=\iiint\limits_V \frac{\mu(\xi-x)}{r^3}\,dV,\quad Y=\iiint\limits_V \frac{\mu(\eta-y)}{r^3}\,dV,\quad Z=\iiint\limits_V \frac{\mu(\zeta-z)}{r^3}\,dV,$$

essendo (x, y, z) il punto nel quale si considera il campo, (ξ, η, ζ) un punto variabile di V, r la distanza fra (x, y, z) e (ξ, η, ζ).

Detti l, m, n i coseni direttori della normale alla superficie S, il flusso Φ uscente da questa superficie è dato dalla formula

$$\Phi=\iint\limits_S (Xl+Ym+Zn)dS.$$

Osservato ciò, fissiamo una successione di pluriparallelepipedi

$$R_1,\quad R_2,\ldots,\quad R_k,\ldots,$$

tale che il volume di R_k tenda a zero per k tendente a $+\infty$, e tale che la superficie S sia completamente interna a ciascun pluriparallelepipedo della successione. Prendiamo poi una costante positiva δ che determineremo nel seguito, e, per ogni punto P della superficie S fissato, sia σ_P la sfera col centro in P e raggio δ. Indichiamo con $M_k^{(i)}$, $M_k^{(e)}$, M_k', M_k'', rispettivamente la massa interna ad S ed esterna ad R_k, la massa esterna ad S e a R_k, la massa interna a R_k e a σ_P, la massa interna ad R_k ed esterna a σ_P; e sieno $X_k^{(i)}$, $X_k^{(e)}$, X_k', X_k'' le componenti secondo l'asse delle x, nel punto P, dei campi dovuti a queste singole masse; in modo analogo indichiamo le componenti secondo l'asse delle y e secondo l'asse della z.

È evidentemente, per la proprietà additiva degli integrali propri

(1) Possiamo supporre che V sia a distanza limitata, perchè, nel caso contrario, potremmo abbandonare la massa esterna a una sfera racchiudente S nel suo interno, dato che il flusso attraverso ad S, dovuto a una tale massa, è nullo.

o impropri,

$$X = X_k^{(i)} + X_k^{(e)} + X_k' + X_k'';$$

e, se indichiamo con $\Phi_k^{(i)}$, $\Phi_k^{(e)}$, Φ_k', Φ_k'' i flussi dovuti ai quattro campi nei quali abbiamo spezzato il campo dato inizialmente, si ha:

$$\Phi_k^{(i)} = -4\pi M_k^{(i)}, \quad \Phi_k^{(e)} = 0,$$

e quindi

$$\Phi = -4\pi M_k^{(i)} + \Phi_k' + \Phi_k''.$$

Ora, con notazioni evidenti, è

$$|X_k'| = \left|\iiint_{V_k'} \frac{\mu\,|\zeta - z|}{r^3}\,dV\right| \leq B\left|\iiint_{\sigma_P} \frac{|\zeta - z|}{r^3}\,dV\right| =$$

$$= B\left|\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\delta \frac{|\rho\cos\vartheta|}{\rho^3}\,\rho^2 d\rho\, d\varphi \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\right| < 2B\pi^2\delta,$$

e

$$|X_k''| < \frac{|M_k''|}{\delta^2}.$$

Da queste disuguaglianze e dalle loro analoghe segue

$$|\Phi_k'| < 6B\pi^2\delta S$$

$$|\Phi_k''| < \frac{3\,|M_k''|\,S}{\delta^2}.$$

Ciò posto, per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, si può determinare un $\delta > 0$ tale che sia

$$6B\pi^2\delta S < \frac{\varepsilon}{2},$$

e, fissato un tale δ, si può determinare $\bar{k}$ tale che per $k > \bar{k}$, si abbia

$$\frac{3\,|M_k''|\,S}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per ogni $k > \bar{k}$, è

$$|\Phi + 4\pi M_k^{(i)}| < \varepsilon.$$

Da questa disuguaglianza e dal fatto che $\lim\limits_{k \to \infty} M_k^{(i)} = M^{(i)}$, segue subito

$$\Phi = -4\pi M^{(i)},$$

cioè la formula di GAUSS che volevamo dimostrare.