Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Renato Calapso

Intorno ad un teorema di B. Segre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 153–157.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_153_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Intorno ad un teorema di B. Segre.

Nota di R. CALAPSO (a Messina).

Sunto. - *Si mette in relazione un teorema di* B. SEGRE *sulla conica di* KOMMEREL (*nella teoria delle superficie di un* S_4) *con alcune proprietà delle normali — nel senso di* GUICHARD — *ai sistemi coniugati ed ortogonali di uno spazio a quattro dimensioni.*

1. In una estesa e molto interessante Memoria pubblicata dal prof. B. SEGRE nei « Rend. del Seminario Matem. » di Roma ([1]), l'Autore stabilisce, fra l'altro, la seguente proposizione:

In ogni punto di una superficie F *— non sviluppabile — di un* S_4 *la relativa conica di* KOMMEREL *si spezza allora e soltanto allora che il doppio sistema coniugato che le appartiene risulti ortogonale* ([2]).

La bella proprietà segnalata dal prof. SEGRE è perciò caratteristica per le reti ortogonali (o semplicemente: reti O) di un S_4 e noi qui ci proponiamo di rilevarne un'interpretazione in relazione al concetto di normale, secondo GUICHARD, ad una rete ortogonale in un suo generico punto ([3]).

A questo scopo premettiamo qualche considerazione.

Se il punto $P(uv)$ descrive — al variare dei due parametri indipendenti u, v — una rete O di uno spazio S_{n+2}, ad $n+2$ dimensioni, rimane posta la questione (in analogia a note proprietà dello spazio ordinario) di caratterizzare quelle normali che, al variare di P sull'una o sull'altra curva della rete descrivano superficie sviluppabili ([4]). La detta caratterizzazione è stata fatta

([1]) B. SEGRE, *Questioni geometriche legate con la teoria delle funzioni di due variabili complesse.* (« Rend. Sem. Matem. », Roma, 1932, serie II, vol. VII, parte II: Memorie).

([2]) È bene che il lettore tenga pure presente in questi studi il n.° 25 della fondamentale Memoria del SEVERI: *Risultati, vedute e problemi sulla teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse.* (Ibidem, pag. 29).

([3]) C. GUICHARD, *Sur les systèmes ortogonaux, ecc.* (« Annales del l'École Normale Superieure », 1897-1898-1903); L. P. EISENHART, *Transformation of surfaces* (Princeton, 1923); G. TZITZEICA, *Géometrie differentielle projective des reseaux* (Bucarest, 1924).

([4]) Se la rete non è ortogonale, soltanto le normali *isotrope* godono dell'anzidetta proprietà. Non ci consta che ciò sia stato mai segnalato (per le reti non ortogonali). Per le reti O la proprietà (che le normali isotrope dal GUICHARD (loc. cit.) e perciò noi chiamiamo brevemente « normale di GUICHARD » ogni normale ad una rete O che goda della suddetta proprietà. Ricordiamo ancora che, se $(n+2)$ è la dimensione dello spazio al quale appartiene la rete, le normali di GUICHARD si riducono ad n fra loro indipendenti, nel senso che se ne possono sempre fissare n (e non meno) in guisa che i coseni direttori di ogni altra sono combinazioni lineari *a coefficienti costanti* di quelli relativi alle n normali prefissate [1].

Adunque, fissato che sia il punto P — che al variare dei due parametri u, v descrive la rete O dell'S_4 — per *ogni* normale n di GUICHARD (in P alla rete O) si verifica che variando solamente v, esiste sulla detta normale un punto C_n che descrive una curva tangente alla retta, e noi chiamiamo C_n *centro di curvatura* e C_nP raggio di curvatura alla rete O nel punto P. Analogamente, facendo variare solamente u, viene definito un secondo centro di curvatura C_n' ed il corrispondente raggio di curvatura $C_n'P$ [2]; sicchè per *ogni* normale n di GUICHARD (in P alla rete O) abbiamo due centri di curvatura C_n e C_n' e due raggi di curvatura.

Ciò posto possiamo enunciare l'annunciata proposizione nel seguente modo:

Le rette in cui si spezza la conica di KOMMEREL (fissato che sia il generico punto P della rete) *sono i luoghi dei centri di curvatura della rete ortogonale, relativi al punto* P.

2. Possiamo dimostrare la detta proposizione avvalendoci delle note formole e notazioni di GUICHARD per le reti O, che qui riportiamo per comodità del lettore.

Per definire una rete O dell'S_4 partiamo da un determinante ortogonale di GUICHARD, del quarto ordine:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

descrivono sviluppabili) trovasi in P. CALAPSO: *Intorno alle congruenze rettilinee sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura* (« Annali », serie IV, 1930-31). Il lettore può dedurre la proprietà segnalata dalle formole di B. SEGRE (loc. cit., pag. 72).

(1) Vedi C. GUICHARD, loc. cit..

(2) Per ulteriori sviluppi vedi R. CALAPSO: *Sulle reti derivate dalle reti O* (Palermo, Tipografia Matematica, 1925).

i cui elementi (funzioni dei due parametri u e v) soddisfano ad un sistema della forma:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{ri}}{\partial u} = a_r \xi_i\,; & \dfrac{\partial x_{ri}}{\partial v} = b_r \eta_i \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = -a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} - p\eta_i\,; & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = q\eta_i \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = p\xi_i\,; & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - q\xi_i \end{cases}$$

$$(r = 1\,;\ 2 \quad \text{e} \quad i = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4).$$

Se quattro funzioni x_1, x_2, x_3, x_4 soddisfano ad un sistema di equazioni della forma

$$(3)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u} = h\xi_i\,; \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l\eta_i$$

il punto $P \equiv (x_i)$ descrive, nel modo più generale, una rete O di uno spazio euclideo a quattro dimensioni, S_4.

Le condizioni d'integrabilità del sistema (2), (3) sono:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = lp\,; \quad \dfrac{\partial l}{\partial u} = hq \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial v} = pb_r\,; \quad \dfrac{\partial b_r}{\partial u} = qa_r \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} + \dfrac{\partial q}{\partial u} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0. \end{cases}$$

Le prime due righe del determinante (1) forniscono i coseni direttori di due normali di GUICHARD, indipendenti, mentre le ultime due righe forniscono i coseni direttori delle tangenti alle curve della rete ortogonale passanti per il generico punto P che descrive la rete.

Ciò posto, osserviamo che un punto situato su una generica normale in P alla rete O ha le coordinate della forma

$$(5)\qquad x_i'' = x_i + \lambda\,(\cos\omega \cdot x_{1i} + \operatorname{sen}\omega \cdot x_{2i})$$

e se vogliamo disporre di λ in guisa che variando solamente u il punto descriva una curva tangente alla retta, dovranno sussistere relazioni della forma

$$(6)\qquad \frac{\partial x_i''}{\partial u} = \rho\,(\cos\omega \cdot x_{1i} + \operatorname{sen}\omega \cdot x_{2i})$$

e viceversa. Tenendo allora conto delle (3), (4) e (5) e del fatto che sopprimendo l'ultima riga nel determinante (1) otteniamo una matrice non nulla, deduciamo le equazioni

$$
(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} \cos \omega - \lambda \operatorname{sen} \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = \rho \cos \omega \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} \operatorname{sen} \omega + \lambda \cos \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = \rho \operatorname{sen} \omega \\ h + \lambda (a_1 \cos \omega + a_2 \operatorname{sen} \omega) = 0. \end{cases}
$$

Le prime due dànno

$$
\rho = \frac{\partial \lambda}{\partial u}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0
$$

e l'ultima di queste è sempre soddisfatta per una normale secondo GUICHARD (cioè $\omega =$ cost.). La terza delle (7) dà

$$
(8) \qquad \lambda = - \frac{h}{a_1 \cos \omega + a_2 \operatorname{sen} \omega}
$$

e le (5), per questo valore di λ dànno le coordinate del centro di curvatura C_n' (v. n. 1). Analogamente si procede per avere le coordinate di C_n.

Si tratta ora di caratterizzare i luoghi descritti dai punti C_n e C_n' al variare della normale n di GUICHARD, cioè al variare della costante ω.

A questo scopo conviene fare un passaggio in coordinate *locali*, chiamando così le ausiliarie x_i' che facciamo corrispondere, secondo l'uso, alle coordinate x_i'' di un qualunque punto mediante la posizione:

$$
(9) \qquad x_i'' = x_i + x_1'\xi_i + x_2'\eta_i + x_3'x_{1i} + x_4'x_{2i}
$$

(fissato che sia il punto che descrive la rete). Allora dalle (5), (8) e (9) deduciamo, per le coordinate locali di C_n':

$$
(10) \qquad \begin{cases} x_1' = 0; & x_2' = 0; \\ x_3' = - \dfrac{h}{a_1 \cos \omega + a_2 \operatorname{sen} \omega}; & x_4' = - \dfrac{h \operatorname{sen} \omega}{a_1 \cos \omega + a_2 \operatorname{sen} \omega} \end{cases}
$$

ed eliminando ω risulta subito che il luogo descritto da C_n' è la retta

$$
(11) \qquad a_1x_3' + a_2x_4' + h = 0; \quad x_1' = 0; \quad x_2' = 0;
$$

e similmente si riconosce che il luogo descritto da C_n' è la retta

$$
(12) \qquad b_1x_3' + b_2x_4' + l = 0; \quad x_1' = 0; \quad x_2' = 0.
$$

D'altra parte, traducendo nelle notazioni qui adoperate le formole di B. Segre (loc. cit., pag. 73) o quelle di Kommerel [1], si vede che le rette in cui si spezza la conica di Kommerel (a norma del teorema di B. Segre) sono proprio le (11) e (12), e la proposizione è stabilita.

Osservazione. — Il fatto che i centri di curvatura delle varie normali ad una rete O in un suo punto stiano sulla relativa conica di Kommerel, poteva anche prevedersi per via geometrica, bastando all'uopo tener conto della definizione di tale conica; gli sviluppi precedenti forniscono pertanto una nuova verifica della parte diretta del teorema di B. Segre ricordato in principio.

(1) Vedi la Memoria del Kommerel citata in quella del Segre.