Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle curve razionali di un iperquadrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 157–159.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_157_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Sulle curve razionali di un' iperquadrica.

Nota di MARIO VILLA (a Milano).

Sunto. - *L' Autore determina le curve algebriche razionali di un' iperquadrica.*

1. Nella teoria delle varietà iperalgebriche presenta notevole interesse la ricerca delle varietà algebriche giacenti sopra una ipersuperficie iperalgebrica V_{2r-1} di S_r [1]. Da questo problema dipendono altre questioni sulle varietà algebriche, considerate nella teoria delle varietà iperalgebriche [2].

Mediante i modelli proiettivi (e antiproiettivi) Φ delle V_{2r-1}, considerati recentemente in una mia Nota [3], i quali sono l' intersezione completa di una varietà algebrica con un' iperquadrica (non specializzata), la ricerca cui si è alluso si riduce a una di geometria sull' iperquadrica: sostanzialmente, a quella delle varietà algebriche di un' iperquadrica.

Il risultato che espongo in questa Nota rappresenta un primo passo in tale ordine di idee.

[1] Alle V_{2r-1}, principalmente, è dedicata la mia Memoria (che richiamerò con M): *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*, « Mem. dell' Acc. d' Italia », 1934.

[2] Ad esempio, quella del n. 38 di M.

[3] *Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche*, « Rend. dei Lincei », ser. 6ª, vol. 20, p. 9, 1934.

2. Si ha:

Se una curva algebrica razionale C giace sopra un'iperquadrica, anche lo spazio a cui C appartiene giace sull'iperquadrica.

Dimostriamo dapprima il lemma:

Affinchè sia identicamente

$$\sum_{ij} a_{ij} u_i \bar{u}_j \equiv 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots, p), \tag{1}$$

le a *essendo costanti tali che* $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ [1], *le* u_i *forme algebriche in due variabili omogenee* x_1, x_2, *dello stesso ordine* n, *linearmente indipendenti,* p *un numero intero (positivo), occorre (e basta) che*

$$a_{ij} = 0.$$

Poniamo infatti

$$u_i \equiv \sum_h b_{ih} x_1^h x_2^{n-h} \qquad (h = 0, \dots, n),$$

le b essendo costanti.

La (1) diviene

$$\sum_{ijhk} a_{ij} b_{ih} \bar{b}_{jk} x_1^h x_2^{n-h} \bar{x}_1^k \bar{x}_2^{n-k} \equiv 0 \qquad (k = 0, \dots, n).$$

Affinchè ciò avvenga deve essere [2]

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ih} \bar{b}_{jk} = 0,$$

ossia

$$\sum_i b_{ih} (\sum_j a_{ij} \bar{b}_{jk}) = 0. \tag{2}$$

Moltiplicando la (2) per $x_1^{n-h} x_2^h$ e sommando le (2) relative ad uno stesso valore di k, si ottiene

$$\sum_i (\sum_j a_{ij} \bar{b}_{jk}) u_i \equiv 0.$$

Essendo le u_i linearmente indipendenti, sarà

$$\sum_j a_{ij} \bar{b}_{jk} = 0,$$

ossia

$$\sum_j a_{ji} b_{jk} = 0. \tag{3}$$

[1] Al solito indichiamo con $\bar{\varphi}$ la funzione che si ottiene sostituendo ad ogni coefficiente e ad ogni variabile di una funzione φ il numero complesso coniugato.

[2] Le condizioni d'identità per due forme iperalgebriche sono le stesse che per due forme algebriche. Vedi: BENEDETTI, *Sulla teoria delle forme iperalgebriche*, « Annali Sc. Norm. di Pisa », vol. 8, nn. 6, 7, 8, 1899.

Moltiplicando la (3) per $x_1^k x_2^{n-k}$ e sommando le (3) si ha

$$\sum_j a_{ji} u_j \equiv 0.$$

Essendo le u_j linearmente indipendenti, sarà

$$a_{ji} = 0,$$

il che prova l'asserto.

È ora agevole dimostrare il teorema enunciato. Sia infatti

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i \bar{x}_j = 0, \quad (a_{ij} = \bar{a}_{ji}), \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, \delta),$$

l'equazione dell'iperquadrica di S_δ (1), e S_p lo spazio (minimo) a cui appartiene C. Siano

$$x_{p+1} = \ldots = x_\delta = 0$$

le equazioni di S_p, e quelle di C siano

$$x_l = u_l, \quad x_{p+1} = \ldots = x_\delta = 0, \qquad (l = 0, \ldots, p),$$

dove le u_l sono forme algebriche omogenee, dello stesso ordine, linearmente indipendenti, in due parametri λ_1, λ_2.

C appartiene all'iperquadrica solo quando

$$\sum_{lm} a_{lm} u_l \bar{u}_m \equiv 0, \qquad (l, m = 0, \ldots, p),$$

ossia — pel lemma precedente — $a_{lm} = 0$.

S_p appartiene all'iperquadrica solo quando

$$\sum_{lm} a_{lm} x_l \bar{x}_m \equiv 0, \qquad (l, m = 0, \ldots, p),$$

il che — pel principio d'identità — impone pure $a_{lm} = 0$.

3. Siccome sopra un'iperquadrica (non specializzata) di S_δ di specie ν $\left(0 \leq \nu < \frac{\delta}{2} \text{ per } \delta \text{ pari}, \; 0 \leq \nu < \frac{\delta+1}{2} \text{ per } \delta \text{ dispari}\right)$ esistono degli S_ν (e non degli spazi superiori) (2), concludiamo che *le curve algebriche razionali situate sopra un'iperquadrica sono quelle giacenti negli spazi lineari ad essa appartenenti, e quelle soltanto* (3).

(1) L'iperquadrica può anche essere specializzata, in quanto non si fa alcuna ipotesi sul determinante $|a_{ij}|$. Vedi: M, n. 28.

(2) M, n. 28.

(3) Sulle iperquadriche (non specializzate) degli spazi di dimensione < 5 non esistono quindi curve razionali, diverse dalle rette.