

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MARIO VILLA

## Sulle varietà iperalgebriche semplicemente infinite

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 14 (1935), n.3, p. 160–165.*

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1935\\_1\\_14\\_3\\_160\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_160_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sulle varietà iperalgebriche semplicemente infinite.

Nota di MARIO VILLA (a Milano).

**Sunto.** - L'Autore esamina, dapprima, la corrispondenza congiunta e la varietà algebrica minima  $C_\delta$  di una varietà iperalgebrica  $V_k$ . Studia poi, principalmente, le  $V_1$  che chiama a valenza (le altre  $V_1$  sono parti di queste) e arriva alla proprietà fondamentale: una  $V_1$  a valenza è l'intersezione completa (a meno di un numero finito di punti) di  $C_1$  con una ipersuperficie iperalgebrica. Applica inoltre questo teorema alle curve algebriche.

1. Considerando le varietà iperalgebriche  $V_k$ , a  $k$  parametri reali, non algebriche, dal punto di vista della geometria cremoniana (ordinaria e complessa) <sup>(1)</sup>, sono fondamentali le nozioni di varietà algebrica  $C_\delta$  (a  $\delta$  parametri complessi) minima contenente  $V_k$  ( $\delta \leq k$ ) e di corrispondenza  $\Gamma$  congiunta a  $V_k$  <sup>(2)</sup>.  $C_\delta$  <sup>(3)</sup> e  $\Gamma$  <sup>(4)</sup> sono covarianti di  $V_k$ . Di conseguenza: i caratteri cremo-

<sup>(1)</sup> Alla geometria cremoniana delle  $V_{2r-1}$  di  $S_r$  sono dedicati i lavori: VILLA, *Connessioni algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*, « Mem. Acc. d'Italia », vol. 6, p. 151, 1931 (questo lavoro verrà richiamato con I); VILLA, *Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche*, « Rend. dei Lincei », vol. 20, serie 6<sup>a</sup>, p. 9, 1934.

<sup>(2)</sup> Queste nozioni sono state introdotte da C. SEGRE, ma utilizzate da questo A. solo dal punto di vista proiettivo. (C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, « Math. Ann. », vol. 40, p. 440, 1892).

<sup>(3)</sup> Premetto la definizione:  $V_k$  si dirà *irriducibile* quand'è irriducibile la varietà (algebrica) reale immagine, nelle ben note rappresentazioni reali degli enti complessi. Varietà iperalgebrica *riducibile* è l'insieme di un numero finito di varietà iperalgebriche irriducibili. Si può ora, con precisione, definire la varietà minima  $C_\delta$ : la  $C_\delta$  di una  $V_k$  *irriducibile* è la varietà algebrica *irriducibile*, di *dimensione minima*, contenente  $V_k$ . Se  $V_k$  giace infatti in una  $C_\delta$  irriducibile, e non in una varietà algebrica  $C_{\delta-1}$  (di dimensione complessa  $\delta-1$ ), di varietà algebriche irriducibili  $C_\delta$ , contenenti  $V_k$ , ve n'è una sola: se ve ne fossero due, nella  $C_{\delta-1}$  intersezione giacerebbe  $V_k$ .

<sup>(4)</sup> Sopra  $C_\delta$  la  $V_k$  individua una corrispondenza iperalgebrica involutoria, prodotto di una corrispondenza algebrica e del coniugio, nella quale ad un punto corrisponde una varietà algebrica  $M_{k-\delta}$  (a  $k-\delta$  parametri complessi), il cui luogo dei punti uniti è  $V_k$ . Preferisco chiamare congiunta a  $V_k$  questa corrispondenza  $\Gamma$ , anzichè, come fa SEGRE, quella armonica al coniugio.

niani di  $C_8$  e  $\Gamma$  sono caratteri cremoniani di  $V_k$ . Ad es., per una varietà iperalgebrica  $V_1$  semplicemente infinita (varietà ad un parametro reale: filo), sono caratteri cremoniani di  $V_1$  il genere della curva  $C_1$ , che chiamo *rango* di  $V_1$ , i moduli di  $C_1$ , che chiamo *moduli* di  $V_1$ , l'indice  $n$  di  $\Gamma$ : *indice* di  $V_1$  <sup>(1)</sup>, ecc..

Considerando le  $V_k$  dal punto di vista della geometria birazionale, si presentano fatti ben diversi. Per fissar le idee, limitiamoci alle  $V_1$ . Se le curve  $C_1$  di due  $V_1$  sono birazionalmente equivalenti, e le  $V_1$  sono corrispondenti, la  $\Gamma$  dell'una si trasforma nella  $\Gamma$  dell'altra. Ma la *birazionalità delle  $V_1$  non trae quella delle  $C_1$* .

Siano infatti  $V_1, V_1'$  due fili, irriducibili, birazionalmente equivalenti,  $C_1$  e  $C_1'$  le curve minime relative. Sulla superficie  $\theta$  delle coppie di punti di  $C_1, C_1'$ , le coppie di punti corrispondenti di  $V_1, V_1'$  danno luogo ad un filo  $\psi$  irriducibile. La curva algebrica minima  $\varphi$  contenente  $\psi$ , avendo infiniti punti comuni con  $\theta$ , giace su  $\theta$ , e rappresenta quindi una corrispondenza algebrica fra  $C_1, C_1'$ , la quale però non è necessariamente birazionale.

Prescindendo da siffatte questioni, è chiaro che la natura di  $V_k$  sarà svelata appieno da un esame approfondito di  $\Gamma$ . Si tratta, dapprima, di esaminare il sistema algebrico che sopra  $C_8$  è formato dalle  $M_{k-8}$  corrispondenti in  $\Gamma$  ai punti di  $C_8$  <sup>(2)</sup>.

2. Limitiamoci alle  $V_1$  (irriducibili) <sup>(3)</sup>, nell'ipotesi che i gruppi di punti  $M_0$  stiano in una serie lineare. La  $\Gamma$  è allora a valenza <sup>(4)</sup>, e il filo  $V_1$  si dirà pure a *valenza* <sup>(5)</sup>. La serie lineare  $g_n^s$

<sup>(1)</sup> Se  $n=1$ , l'insieme dei moduli di  $C_1$  è coniugato di sè stesso. Il filo  $V_1$  è birazionalmente equivalente all'insieme  $V_1'$  dei punti reali di una curva algebrica reale (nel senso che è trasformata in sè dal coniugio). La corrispondenza congiunta a  $V_1'$  è il coniugio. (KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882; C. SEGRE, op. cit., p. 441).

<sup>(2)</sup> In  $L$ , la  $\Gamma$  (connesso) relativa ad una  $V_{2r-1}$  di  $S_r$  (ipersuperficie iperalgebrica) è studiata in modo esauriente, considerando il sistema lineare minimo in cui giacciono le  $M_{r-1}$ .

<sup>(3)</sup> Supporrò i gruppi  $M_0$  privi di punti fissi, chè tali punti si staccherebbero dal filo.

<sup>(4)</sup> Dico  $\Gamma$  a valenza perchè è a valenza la corrispondenza algebrica  $\Gamma^*$ , chiamata congiunta da SEGRE (op. cit., p. 440), che moltiplicata pel coniugio dà  $\Gamma$ .

<sup>(5)</sup> Esistono anche fili non a valenza. Per es.: i fili d'indice 1 giacenti su curve  $C_1$  non razionali. Infatti i punti  $M_0$  di  $C_1$ , non essendo  $C_1$  razionale, non formano una  $g_1^1$ .

(dove  $n$  è l'indice di  $V_1$ ), di dimensione (complessa) minima  $s$ , contenente i gruppi  $M_0$ , si dirà la *serie associata* a  $V_1$  <sup>(1)</sup>. Dico che:

In  $g_n^s$  esiste un'antipolarità  $\omega$  (non degenera, dotata di elementi uniti) nella quale alla serie  $g_n^{s-1}$ , staccata da  $g_n^s$  da un punto generico  $P$ , corrisponde il gruppo omologo di  $P$  in  $\Gamma$ .

$V_1$  è a valenza. La corrispondenza algebrica  $\Gamma^*$  è a valenza.  $\Gamma^*$  è quindi rappresentata da una sola equazione

$$f(x_i, y_i) = 0 \quad (2).$$

Siccome  $\Gamma^*$  è armonica al coniugio, la  $f$  è una funzione a coefficienti coniugati <sup>(3)</sup>. L'equazione di  $\Gamma$  si ottiene dalla precedente ponendo  $y_i = \bar{z}_i$  <sup>(4)</sup>, ed è perciò

$$\sum_i a_i u_i \bar{u}_i' = 0,$$

le  $u_i$  essendo forme algebriche nelle  $x_i$ , di grado  $n$ , linearmente indipendenti, la  $\bar{u}_i'$  ottenendosi da  $u_i$  ponendo per ogni termine  $kx_1^z x_2^{\beta} \dots$  il termine  $\bar{k} \bar{z}_1^z \bar{z}_2^{\beta} \dots$ , e le  $a$  costanti reali <sup>(5)</sup>. La  $g_n^s$  è staccata su  $C_1$  dal sistema lineare

$$\sum_i \lambda_i u_i = 0,$$

e la  $\omega$  è

$$\sum_i \frac{1}{a_i} \lambda_i \bar{\lambda}_i' = 0.$$

La  $\omega$  si dirà *antipolarità subordinata* da  $V_1$ . Da  $g_n^s$  e  $\omega$  si ritorna a  $\Gamma$ : facendo corrispondere al punto generico  $P$  il gruppo omologo in  $\omega$  della serie che  $P$  stacca da  $g_n^s$ .

Le nozioni di filo a valenza, di serie associata, sono cremoniane.

Quindi: *i caratteri cremoniani di  $g_n^s$  e  $\omega$  sono caratteri cremoniani di  $V_1$* . La dimensione  $s$  di  $g_n^s$  è un nuovo invariante cremoniano di  $V_1$ , che chiamo *genere algebrico* di  $V_1$  ( $s \leq n$ ). Un altro invariante cremoniano di  $V_1$  è la specie  $\nu$  di  $\omega$  (cioè la dimensione complessa  $\nu$  delle serie, subordinate di  $g_n^s$ , di dimensione massima,

<sup>(1)</sup> I fili delle curve razionali sono tutti a valenza. La serie associata ad un filo rettilineo altro non è che l'involuzione associata (VILLA, *Intorno ai fili rettilinei*, « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », 1933).

<sup>(2)</sup> SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, vol. 1°, parte 1ª, Zanichelli, Bologna, p. 199, 1926.

<sup>(3)</sup> L, p. 165.

<sup>(4)</sup> Denotiamo con  $\bar{\chi}$  la funzione che s'ottiene da una funzione  $\chi$  ponendo per ogni coefficiente  $c$  per ogni variabile il numero complesso coniugato.

<sup>(5)</sup> L, pp. 166, 167.

i cui gruppi sono tutti uniti in  $\omega$ ), che chiamo *specie* di  $V_1$ ,  
 $\left(0 \leq v \leq \frac{s}{2} \text{ per } s \text{ pari, } 0 \leq v \leq \frac{s+1}{2} \text{ per } s \text{ dispari}\right)$ .

Abbiamo visto che un filo è il luogo dei punti uniti di  $\Gamma$ , ma  
 pei fili a valenza possiamo anche dire:  $V_1$  è il luogo dei punti  
 comuni ai gruppi di  $g_n^s$  e ai punti fissi delle serie corrispondenti  
 in  $\omega$ .

**3.** Un filo  $V_1$  (irriducibile) è a valenza quando, e solo quando,  
 è l'intersezione completa (a meno di un numero finito di punti)  
 della curva  $C_1$  (irriducibile) su cui giace con una ipersuperficie  
 iperalgebrica (irriducibile) del suo spazio.

La condizione è sufficiente. Supponiamo  $V_1$  piano (il ragiona-  
 mento vale immutato per  $V_1$  iperspaziale). La ipersuperficie iper-  
 algebrica irriducibile sarà quindi una  $V_3$ . Per ipotesi,  $V_3$  sega  $C_1$   
 in un filo  $V_1^*$ , che si spezza in  $V_1$  e in un numero finito (anche  
 nullo) di punti  $H$ . Gli  $H$  sono quindi i punti fissi dei gruppi  $M_0$ ,  
 relativi a  $V_1^*$  (n. 1). I gruppi  $M_0$ , relativi a  $V_1$ , si ottengono quindi  
 dagli  $M_0$  precedenti, privandoli dei punti  $H$ .

Basterà dunque dimostrare che i gruppi  $M_0$ , relativi a  $V_1^*$ ,  
 stanno in una serie lineare. Facciamo corrispondere al punto ge-  
 neric di  $C_1$  il gruppo di punti  $\alpha$  in cui la curva corrispondente  $\gamma$ ,  
 nel connesso congiunto a  $V_3$ , taglia  $C_1$ . Nasce su  $C_1$  una corrispon-  
 denza iperalgebrica involutoria, che ha  $V_1^*$  per luogo dei punti  
 uniti, e coincide quindi con la corrispondenza congiunta a  $V_1^*$ .  
 Gli  $M_0$  relativi a  $V_1^*$  coincidono con gli  $\alpha$ , e giacciono quindi in  
 una serie lineare, giacendo in un sistema lineare le curve  $\gamma$ .

Dimostriamo che la condizione è necessaria.  $V_1$  è a valenza  
 (e lo supporremo ancora piano). Consideriamo nel piano di  $V_1$  un  
 sistema lineare di curve  $\Sigma$ , che stacchi, fuori di un gruppo  $H$  di  
 punti fissi, la serie associata  $g_n^s$  a  $V_1$ , in guisa che  $\Sigma$  sia ancora di  
 dimensione  $s$ . L'antipolarità  $\omega$  in  $g_n^s$  determina un'antipolarità  $\Omega$   
 in  $\Sigma$ . La  $V_3$ , irriducibile, individuata da  $\Sigma$  e  $\Omega$  <sup>(1)</sup>, sega  $C_1$  in  $V_1$   
 e nei punti  $H$ .

**4.** Siccome un filo giace sempre in una ipersuperficie iperal-  
 gebrica, e l'intersezione di una curva con una ipersuperficie iper-  
 algebrica è, in generale, un filo, si conclude:

*Un filo non a valenza è l'intersezione parziale della curva  $C_1$*

<sup>(1)</sup> L, p. 170. Non si tratta d'una varietà di minor dimensione, essendo  
 $\Sigma$  generico.

su cui giace con una ipersuperficie iperalgebrica del suo spazio. Con altre parole:

*Un filo non a valenza si può sempre pensare come parte di un filo riducibile a valenza.*

5. Il legame fra le serie lineari di una curva algebrica e i suoi fili a valenza è espressivo ed importante, anche per le applicazioni che presenta per le stesse curve algebriche.

Si arriva, per es., ad una proprietà essenzialmente *iperalgebrica* e caratteristica per le curve *algebriche* razionali. Essa è la seguente:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una curva algebrica (irriducibile) sia razionale è che esista una ipersuperficie iperalgebrica (irriducibile) del suo spazio che la seghi in un filo d'indice 1 (e eventualmente in altri punti in numero finito).*

La condizione è sufficiente. Infatti: il filo d'indice 1, essendo l'intersezione completa (a meno di un numero finito di punti) della curva  $C_1$  con una ipersuperficie iperalgebrica, pel teorema del n. 3, è a valenza. I punti di  $C_1$  formano quindi una  $g_1^1$ , sicchè  $C_1$  è razionale.

La condizione è necessaria. Infatti: un filo d'indice 1 della curva  $C_1$ , essendo  $C_1$  razionale, è a valenza, ed è quindi, pel teorema del n. 3, l'intersezione completa (a meno di un numero finito di punti) di  $C_1$  con una ipersuperficie iperalgebrica (irriducibile) <sup>(1)</sup>.

6. Un modello molto semplice e utile di un filo  $V_1$  a valenza si costruisce ricorrendo all'immagine proiettiva di  $g_n^s$  (e a  $\omega$ ) <sup>(2)</sup>.

Per semplicità,  $V_1$  sia piano e la  $g_n^s$  sia semplice. Ponendo una proiettività (non degenera) fra i gruppi di  $g_n^s$  e gli iperpiani di uno spazio  $S_s$  (sicchè ai gruppi di  $g_n^s$ , che passano per un generico punto  $P$  di  $C_1$ , corrispondono gl'iperpiani di  $S_s$ , che passano per un punto  $Q$ ), considerando l'iperquadrica (non specializzata) fondamentale dell'antipolarità di  $S_s$  in cui si rispecchia la  $\omega$ , si arriva al risultato:

<sup>(1)</sup> Un filo d'indice 1 di una curva razionale  $C_1$ , si costruisce nel modo seguente. Sia, per semplicità,  $C_1$  piana. Consideriamo un fascio  $\Sigma$  di curve che seghi  $C_1$ , fuori dei punti fissi  $H$ , in una  $g_1^1$ . Le curve che in  $\Sigma$  formano una catena semplice compongono una  $V_3$  di genere algebrico 1 (L, p. 184), la quale sega  $C_1$  in un filo d'indice 1 (e nei punti  $H$ ).

<sup>(2)</sup> Si tratta di modelli analoghi ai  $\Phi$  delle  $V_3$  piane considerati nella mia Nota lineare già citata.

*Un filo iperalgebrico piano  $V_1$  a valenza, di genere  $s$ , di specie  $v$ , d'indice  $n$ , è birazionalmente equivalente ad un filo  $(V_1)$  di  $S_s$  che è l'intersezione completa di una curva  $C$ , d'ordine  $n$ , irriducibile, birazionalmente equivalente alla  $C_1$ , con un'iperquadrica  $I$  (non specializzata) di specie  $v$ .*

*La serie associata a  $(V_1)$  è quella segata su  $C$  dagli iperpiani di  $S_s$ , e l'antipolarità subordinata è quella determinata dall'antipolarità relativa ad  $I$ .*

*La geometria cremoniana dei fili a valenza  $V_1$  equivale a quella proiettiva dei modelli  $(V_1)$  <sup>(1)</sup>.*

<sup>(1)</sup> Data sopra una curva irriducibile una serie lineare e in questa un'antipolarità, può avvenire che non esista un filo a valenza corrispondente. Il problema — che possiamo chiamare d'esistenza dei fili a valenza — in virtù dei modelli  $(V_1)$ , equivale a quello di stabilire quando l'intersezione di una curva e di un'iperquadrica (che non si appartengono) è effettivamente un filo, ché tale intersezione può anche comporsi d'un numero finito di punti, o mancare.