BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

V. BERNSTEIN

Sopra una proprietà degli ordini precisati

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.3, p. 165–168.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_165_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_165_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Sopra una proprietà degli ordini precisati.

Nota di V. BERNSTEIN (a Milano).

Sunto. - L' A. ebbe a far uso di una proprietà degli ordini precisati, la cui dimostrazione risultò insufficiente a causa di una svista dell' A.: egli ne pubblicò perciò un'altra dimostrazione. Ora, mostra che anche la prima dimostrazione può essere facilmente completata in modo da diventare assolutamente rigorosa.

Nella teoria moderna delle trascendenti intere, la loro crescita viene spesso confrontata con quella di funzioni reali della forma

$$(1) \quad V(r) = r^{\rho(r)},$$

ove $\rho(r)$ denota una funzione reale di r soddisfacente alle due condizioni

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r)r \log r = 0.$$

Una funzione $\rho(r)$ soddisfacente a queste condizioni viene chiamata di *ordine precisato*, e si dice che una trascendente intera $f(z)$ è d'ordine precisato $\rho(r)$, se il massimo limite del rapporto $\log |f(z)| / V(|z|)$, per $z \rightarrow \infty$, è finito e non nullo.

In una Memoria recente ⁽¹⁾, ebbi a far uso di una proprietà degli ordini precisati che può essere così enunciata:

PROPRIETÀ A. — Detto ξ un numero positivo fisso superiore ad uno, si faccia corrispondere ad ogni valore di r l'intero p per il quale $\xi^{p-1} < r \leq \xi^p$; ciò posto, se $\rho(r)$ denota un dato ordine precisato, la disegualianza

$$(3) \quad \sum_{v=p_0}^{v=p} V(\xi^v) = \sum_{v=p_0}^{v=p} \xi^{v \rho(\xi^v)} \leq A(\xi) r^{\rho(r)},$$

nella quale p_0 denota un intero qualunque inferiore a p , è valida per tutti i valori abbastanza grandi di r .

La dimostrazione di questa proposizione ch'io diedi nella Memoria citata ⁽²⁾ era basata su un'altra proprietà degli ordini precisati che si enuncia così:

PROPRIETÀ B. — Se $\rho(r)$ denota un dato ordine precisato, le disegualianze

$$(4) \quad (1-x)h^x \leq (hr)^{\rho(hr)}; r^{\rho(r)} \leq (1+x)h^x,$$

nelle quali x denota un numero positivo arbitrario, ed h un numero compreso nell'intervallo $1 \leq h \leq H$, sono valide per tutti i valori di r , superiori ad un certo valore $r_0 = r_0(x; H)$ che dipende solo da x e da H ⁽³⁾.

Il prof. W. SAXER mi fece però osservare che quella dimostrazione conteneva una svista che la rendeva insufficiente; in conseguenza, pubblicai un'altra dimostrazione della proprietà A, basata su un metodo di dimostrazione completamente diverso ⁽⁴⁾. Nella presente Nota voglio invece mostrare che anche il metodo di dimostrazione da me usato in origine — cioè il metodo che consiste nel dedurre la proprietà A dalla proprietà B — conduce alla meta, purchè esso venga applicato con sufficiente cautela.

⁽¹⁾ Sulle direzioni di Borel di funzioni oloforme. (« Annali di Matem. », serie IV, tomo XII, 1933, pp. 173-196).

⁽²⁾ V. loc. cit., pp. 185-186.

⁽³⁾ V. loc. cit., p. 181.

⁽⁴⁾ Rettifica alla Memoria « Sulle direzioni, ecc. ». (« Annali di Matem. », serie IV, tomo XIV, pp. 15-16). Il primo membro di (3) viene ivi valutato

mediante la sostituzione dell'integrale $\int_{p_0}^{p+1} V(\xi^t) dt$ alla sommatoria, e la successiva valutazione di questo integrale mediante un'integrazione per parti, e coll'ausilio delle (1) e (2).

Fissato $\xi > 1$, si ponga $h = H = \xi$ e si scelga il numero α abbastanza piccolo affinchè $(1 - \alpha)\xi^p$ sia ancora superiore ad uno; per esempio, si prenda α tale che si abbia $(1 - \alpha)\xi^p = \sqrt{\xi^p}$, cioè si ponga $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{\xi^p}}$. Le disuguaglianze (4) saranno allora valide

per ogni $r \geq r_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\xi^p}}; \xi\right)$; pertanto, se si denota con μ_0 il più piccolo intero per cui $\xi^{\mu_0} \geq r_0$, si avrà [tenuto conto della (1)]

$$(5) \quad V(\xi^{\mu+1}): V(\xi^\mu) \geq \sqrt{\xi^p} \quad \text{per ogni } \mu \geq \mu_0.$$

Pertanto, se $p > \nu \geq \mu_0$, basta porre successivamente nella (5) $\mu = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \dots, p - 1$, e moltiplicare termine a termine le disuguaglianze ottenute, per constatare che

$$V(\xi^p): V(\xi^\nu) \geq (\sqrt{\xi^p})^{p-\nu},$$

e da qui scende senz'altro che

$$(6) \quad \sum_{\nu=\mu_0}^{\nu=p} V(\xi^\nu) \leq V(\xi^p) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\xi^p}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^p}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^p}}\right)^{p-\mu_0} \right\} < \\ < \frac{\sqrt{\xi^p}}{\sqrt{\xi^p} - 1} \cdot V(\xi^p).$$

Si dia ora ad r un valore qualunque superiore ad r_0 , e si determini l'intero p in modo che sia $\xi^{p-1} < r \leq \xi^p$. Se si pone nella seconda disuguaglianza (4) $h = \xi^p/r$, lasciando ad H e α i valori precedenti, quella disuguaglianza sarà certo applicabile, perchè r_0 dipende solo da H e da α , ed il valore dato ad h è compreso fra 1 e H . Si avrà dunque

$$V(\xi^p): V(r) \leq (1 + \alpha)h^p < 2H^p = 2\xi^p,$$

e la (6) potrà essere scritta nella forma

$$(7) \quad \sum_{\nu=\mu_0}^{\nu=p} V(\xi^\nu) < \frac{2\xi^p \sqrt{\xi^p}}{\sqrt{\xi^p} - 1} V(r).$$

Sia ora p_0 un numero intero qualunque inferiore a p ; se questo p_0 risulta superiore od uguale al μ_0 definito più sopra, la validità della (3) per ogni $r > r_0$ risulta senz'altro dalla disuguaglianza (7). Se invece $p_0 < \mu_0$ basta notare che μ_0 dipende solo da ξ

e da r_0 (cioè in definitiva solo da ξ) per concludere che

$$(8) \quad \sum_{\nu=p_0}^{\nu=\mu_0-1} V(\xi^\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu_0-1} V(\xi^\nu) = C(\xi).$$

Si denoti ora con $B(\xi)$ il coefficiente di $V(r)$ nel secondo membro della (7) e si ponga $A(\xi) = B(\xi) + C(\xi)$; se il valore di r , oltre ad essere superiore ad r_0 , è anche abbastanza grande perchè $V(r)$ sia superiore ad 1 ⁽¹⁾, basterà aggiungere termine a termine le diseuguaglianze (7) e (8) per ottenere la (3). Questa diseuguaglianza è dunque sempre valida per i valori abbastanza grandi di r , c. d. d. ⁽²⁾.

⁽¹⁾ La possibilità di una simile scelta di r risulta dalle (2).

⁽²⁾ Ci permettiamo di aggiungere che in sostanza la dimostrazione qui esposta si ottiene da quella originaria (loc. cit., pp. 185-186) quando, nella parentesi a graffe dell'espressione (24) a p. 186 della Memoria, si sostituisce a ξ un numero inferiore (p. es. $\sqrt{\xi}$).