

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIORGIO SESTINI

## Sul piano centrale di alcuni sistemi di vettori

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie  
1, Vol. 14 (1935), n.3, p. 168–172.*

Unione Matematica Italiana

<[http:  
//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1935\\_1\\_14\\_3\\_168\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_168_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sul piano centrale di alcuni sistemi di vettori.

Nota di G. SESTINI (a Firenze).

**Sunto.** - Si determina, secondo MÖBIUS, il piano centrale delle quantità di moto di un sistema rigido, specificando i casi degeneri; si determina ancora il piano centrale delle pressioni idrostatiche, agenti su di un corpo, immerso in un liquido pesante.

Dato un sistema di vettori  $\mathbf{v}_i$ , applicati nei punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), a risultante  $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i$  diverso da zero, assegnato un versore  $\mathbf{u}$ , il sistema di vettori  $\mathbf{v}_i \times \mathbf{u}$ , paralleli ad  $\mathbf{u}$ , applicati ancora nei punti  $P_i$ , ammette un centro  $U$  definito dalla relazione

$$(U - O) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \sum_i (P_i - O) \cdot \mathbf{v}_i \times \mathbf{u},$$

essendo  $O$  il centro di riduzione. Il centro  $U$  è quindi funzione di  $\mathbf{u}$  e varia col variare di esso, descrivendo un luogo.

La determinazione e lo studio di questo luogo è dovuto a MÖBIUS (1790-1868) <sup>(1)</sup>. Egli infatti per primo riconobbe che il luogo cercato è il piano determinato da tre centri corrispondenti a tre particolari orientazioni di  $\mathbf{u}$  e lo chiamò « piano centrale ». Osservò poi che al fascio delle direzioni parallele al piano centrale

<sup>(1)</sup> A. F. MÖBIUS, *Gesammelte Werke*, 3° Band, pag. 216 e seg., Leipzig 1886; cfr. anche « Crelle », tomo 16 (1837), pp. 1-10.

corrisponde in questo una retta, luogo dei centri  $U$  corrispondenti, che chiamò « *retta centrale* » del piano centrale e infine alla direzione parallela alla retta centrale corrisponde, nel piano centrale, un punto che chiamò « *punto centrale* ».

Poste queste definizioni, il MÖBIUS ricercò e studiò alcune proprietà di questi luoghi e le loro applicazioni alla statica. Queste ricerche furono successivamente riprese ed estese dal MINDING <sup>(1)</sup>, che mise in rilievo altre notevoli proprietà di questi luoghi. Successivamente molti altri si occuparono dell'argomento, ma io mi limiterò a ricordare la vasta bibliografia riportata nell' « *Astistique* » del BOTTASSO <sup>(2)</sup>, alla quale rimando.

È bene però notare che non sempre il luogo cercato è un piano, ma può degenerare, sotto certe condizioni, in una retta e talvolta anche in un punto <sup>(3)</sup>.

In questa piccola Nota porto due esempi, che mi sembrano non privi d'interesse in quanto, nel primo, si possono verificare le circostanze sopra dette, mentre il secondo conduce ad un risultato assai espressivo.

Nel primo esempio i vettori sono le quantità di moto di un sistema rigido, che in generale ammettono un *piano centrale*, passante per il baricentro del sistema, definito dalla velocità di rotazione e dagli elementi centrali d'inerzia; se però la velocità di rotazione del sistema e la velocità del baricentro sono tra loro ortogonali, il luogo degenera in una retta, se poi infine è nulla la velocità di rotazione il luogo si riduce al baricentro del sistema.

Nel secondo esempio i vettori sono le pressioni idrostatiche, agenti su di un corpo immerso in un fluido pesante, le quali ammettono sempre un piano centrale che è orizzontale e simmetrico, rispetto al *centro di spinta*, al piano di *carico nullo*.

**1. Equazione del luogo.** — Sia  $(O, x, y, z)$  una terna di assi cartesiani ortogonali, con riferimento alla quale si può scrivere

$$\mathbf{v} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

Introducendo i tre centri  $U_1, U_2, U_3$ , ottenuti orientando  $\mathbf{u}$  parallelamente ai tre versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  rispettivamente, l'equazione

<sup>(1)</sup> E. A. F. MINDING, « *Crelle* », tomo 15 (1836), pp. 27-38 e 313-316; cfr. anche « *Nouvelles Annales de Mathématiques* », tomo 7°, pag. 179 e seguenti (1848).

<sup>(2)</sup> M. BOTTASSO, *Astistique*, pp. 151-153, Pavia (1915).

<sup>(3)</sup> Cfr. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, tomo 1°, pag. 167, Paris, Gauthier-Villars (1926).

del luogo cercato può scriversi

$$(1) \quad X\alpha(U - U_1) + Y\beta(U - U_2) + Z\gamma(U - U_3) = 0.$$

Questa mostra che il centro  $U$  appartiene al piano, o retta, o punto, individuato dai tre punti  $U_1, U_2, U_3$ , a seconda che sono non allineati, allineati e almeno due distinti, o infine coincidenti. Reciprocamente la (1) permette di stabilire la corrispondenza tra i punti  $U$  del luogo e i versori  $\mathbf{u}$  nei vari casi, come si potrebbe facilmente constatare. Conviene osservare che tutto quello che è stato detto vale anche per una distribuzione continua di vettori.

**2. Moti rigidi.** — Assegnato un sistema continuo, materiale, di densità  $\rho$ , mobile di moto rigido di caratteristiche  $\mathbf{v}_0$  e  $\omega$ , per ogni elemento di volume  $dS$ , contiguo ad un generico punto  $P$  del sistema, resta definito il vettore quantità di moto dell'elemento  $dS$

$$\rho[\mathbf{v}_0 + \omega \wedge (P - O)]dS,$$

dove  $\mathbf{v}_0$  è la velocità di  $O$ .

Assumo, per semplicità, come centro  $O$  il baricentro del sistema in moto e come sistema di riferimento una terna  $(O, x, y, z)$  di assi principali d'inerzia. In tal caso  $\mathbf{v}_0$  è la velocità del baricentro, che supporremo diversa da zero, cosicchè  $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{u}$  non è identicamente nullo. Il sistema di vettori paralleli ad  $\mathbf{u}$

$$\rho \mathbf{u} \times [\mathbf{v}_0 + \omega \wedge (P - O)]dS \cdot \mathbf{u},$$

è a risultante

$$\mathbf{u} \cdot \int_S \rho \mathbf{u} \times [\mathbf{v}_0 + \omega \wedge (P - O)]dS = m \mathbf{v}_0 \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

non identicamente nullo, dove  $m = \int_S \rho dS$  è la massa totale. In questa ipotesi, l'equazione (1) diviene

$$m \mathbf{v}_0 \times \mathbf{u} \cdot (U - O) = \int_S \rho \mathbf{u} \times [\mathbf{v}_0 + \omega \wedge (P - O)] \cdot (P - O) dS,$$

ossia, essendo  $O$  il baricentro,

$$(2) \quad m \mathbf{v}_0 \times \mathbf{u} \cdot (U - O) = \int_S \rho \mathbf{u} \times \omega \wedge (P - O) \cdot ((P - O) dS.$$

Con riferimento alla terna baricentrica scelta, siano  $x, y, z$  le coordinate di  $U$ ;  $\xi, \eta, \zeta$  quelle di  $P$ ;  $p, q, r$  le componenti di  $\omega$ ;  $a_0, b_0, c_0$  le componenti di  $\mathbf{v}_0$ ;  $A, B, C$ , i momenti principali d'inerzia.

Proiettando la (2) sugli assi, si trova

$$\alpha m a_0 x + \beta (m b_0 x - A r) + \gamma (m c_0 x + A q) = 0$$

e due analoghe, dedotte con sostituzione ciclica sulle lettere delle terne introdotte sopra. L'eliminazione di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tra queste porta all'equazione

$$\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega} \cdot (BCpx + CAqy + AB rz) = 0.$$

Supposto  $\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega} \neq 0$ , questa definisce, quale luogo cercato, il piano

$$BCpx + CAqy + AB rz = 0,$$

passante per il baricentro del sistema.

Se  $\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega} = 0$ , essendo  $\mathbf{v}_0 \neq 0$ , o è  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , oppure è  $\mathbf{v}_0$  ortogonale a  $\boldsymbol{\omega}$ .

Il caso  $\boldsymbol{\omega} = 0$  si tratta facilmente, ricorrendo alla (2) che dà subito

$$U - O = 0.$$

In tal caso il luogo si riduce al punto  $O$ , baricentro del sistema.

Sia adesso  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  e ortogonale a  $\mathbf{v}_0$ .

In queste ipotesi si potrà sempre scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_0 \wedge \boldsymbol{\Omega},$$

con  $\boldsymbol{\Omega} = ai + bj + ck$ , necessariamente non parallelo a  $\mathbf{v}_0$ . Sostituendo nella (2), si ha

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}_0 [m(U - O) + aAi + bBj + cCk] = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} (a_0 Ai + b_0 Bj + c_0 Ck),$$

da cui

$$\mathbf{u} \times [(mx + aA)\mathbf{v}_0 - Aa_0\boldsymbol{\Omega}] = 0$$

e due analoghe.

Introduciamo i vettori

$$\mathbf{v}_1 = (mx + aA)\mathbf{v}_0 - Aa_0\boldsymbol{\Omega},$$

$$\mathbf{v}_2 = (my + bB)\mathbf{v}_0 - Bb_0\boldsymbol{\Omega},$$

$$\mathbf{v}_3 = (mz + cC)\mathbf{v}_0 - Cc_0\boldsymbol{\Omega},$$

paralleli evidentemente alla giacitura individuata da  $\mathbf{v}_0$  e  $\boldsymbol{\Omega}$ , giacitura perfettamente determinata per le ipotesi fatte. Poichè il vettore  $\mathbf{u}$ , che non è identicamente normale a  $\mathbf{v}_0$  e  $\boldsymbol{\Omega}$ , deve risultare normale ai tre vettori  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$ , questi devono essere paralleli tra loro. Ciò richiede

$$\frac{mx + aA}{Aa_0} = \frac{my + bB}{Bb_0} = \frac{mz + cC}{Cc_0}.$$

Queste definiscono, quale luogo cercato, la retta non passante per l'origine e di coseni direttori proporzionali ad  $Aa_0$ ,  $Bb_0$ ,  $Cc_0$ .

OSSERVAZIONE. — Il caso  $A=B=C$  importa per il piano, la condizione di essere normale ad  $\omega$ , mentre per la retta quella di essere parallela a  $v_0$ .

**3. Pressioni idrostatiche.** — Internamente ad un liquido pesante, in quiete, si consideri un corpo immerso, occupante una regione  $S$ , limitata da una superficie  $\sigma$ . Assumo come sistema di riferimento una terna di assi cartesiani ortogonali  $(O, x, y, z)$ , con l'origine nel centro di spinta e l'asse delle  $z$  verticale ascendente. Se  $h$  è la quota del piano di carico nullo,  $\mu$  il peso specifico del liquido, avremo la pressione espressa da

$$(3) \quad p = \mu h - \mu z.$$

Sia  $\mathbf{n}$  il versore della normale interna in un punto  $P$  di  $\sigma$ . Il sistema delle pressioni idrostatiche, agenti sul generico elemento  $d\sigma$ , ha risultante non nullo, essendo questo notoriamente la spinta idrostatica subita dal corpo immerso, cioè

$$\int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \mathfrak{S} \mathbf{k}.$$

La (1), in tal caso, diviene

$$U - O = \frac{1}{\mathfrak{S} \gamma} \int_{\sigma} p (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot (P - O) d\sigma.$$

L'integrale del secondo membro si può trasformare in <sup>(1)</sup>

$$-\int_S \operatorname{div}(p\mathbf{u}) \cdot (P - O) dS - \int_S p \mathbf{u} dS;$$

questa, tenuto conto che  $\mathbf{u}$  non dipende da  $S$  e che  $O$  è il centro di spinta, per la (3) diviene

$$\mu \gamma \int_S (P - O) dS - \mu h S \mathbf{u} + \mu \mathbf{u} \int_S z dS = -\mu h S \mathbf{u}.$$

Rilevato che  $\mu S = \mathfrak{S}$ , si ha infine

$$U - O = -\frac{h}{\gamma} \mathbf{u}.$$

Questa prova che il luogo cercato è il piano simmetrico, rispetto al centro  $O$ , al piano di *carico nullo* e risulta pure che il punto  $U$ , corrispondente ad un generico  $\mathbf{u}$ , è l'intersezione del piano  $z = -h$  con la retta della stella di centro  $O$ , orientata come  $\mathbf{u}$ . I punti impropri di questo piano corrispondono ai versori  $\mathbf{u}$  orizzontali ( $\gamma = 0$ ).

<sup>(1)</sup> C. BURALI-FORTI, R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, pag. 235, form. [4], (1929), Bologna, Zanichelli.