Sunti di lavori Italiani

* Lavori di: L. Sobrero, M. Manarini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.3, p. 175–178.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_175_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

L. Sobrero: *La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana* (in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XIV).

Due funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$, biarmoniche (e cioè soddisfacenti all'equazione $\Delta\Delta = 0$, Δ designando l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ di Laplace), rispettivamente definite nei semipiani $x > 0$ ed $x < 0$, le cui derivate seconde si annullano all'infinito, e tali che nei punti dell'asse y risulti $f = \varphi$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, si dicono, dall'A., l'una « riflessa » dell'altra attorno all'asse y. Da ognuna delle due funzioni l'altra si ottiene con sole operazioni di sostituzione e derivazione. Indicando, precisamente, con $\{f\},\ldots, \{\Delta\varphi\}$ le funzioni che rispettivamente si ottengono da $f,\ldots, \Delta\varphi$ ponendo, in queste, in luogo di x il suo contrario $-x$, si ha:

$$\varphi = \{f\} + 2x\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + x^2\{\Delta f\},$$

e reciprocamente:

$$f = \{\varphi\} + 2x\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} + x^2\{\Delta\varphi\}.$$

In modo analogo si definisce l'operazione di riflessione attorno a un cerchio: due funzioni biarmoniche f e φ, la prima definita nei punti interni a un cerchio, la seconda definita nei punti esterni e tale che le sue derivate parziali seconde si annullino all'infinito, si diranno l'una riflessa dell'altra se, nei punti del cerchio, si ha: $f = \varphi$ e $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (n indicando la normale al cerchio). Dalla funzione f alla funzione φ, o viceversa, si può passare con sole operazioni di sostituzione e derivazione.

La retta potendosi riguardare come cerchio degenere (di raggio infinito) l'operazione di riflessione attorno alla retta è dall'A. ottenuta come caso limite di quella di riflessione attorno al cerchio. È da ritenere che operazioni di riflessione analoghe a quelle sopra indicate esistano anche per altri tipi di contorni (oltre il cerchio e la retta) e per altri tipi di funzioni (oltre le biarmoniche).

L'A. fa applicazione dell'operazione di riflessione analitica ai due seguenti problemi di elasticità piana: ricerca della perturbazione prodotta da un foro circolare nella sollecitazione di un sistema piano e determinazione degli sforzi in un semipiano elastico sollecitato da una forza applicata in un punto interno.

M. Manarini: *Sugli spazi di Weyl*. Introduzione geometrica vettoriale assoluta alla teoria della relatività generale (in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XIV).

È noto che gli « spazi di Weyl » trovano importante applicazione nelle teorie unitarie della meccanica relativistica giacchè con essi il Weyl stesso ha potuto interpretare geometricamente, oltre il campo gravitazionale, anche il campo elettromagnetico, mirando a quella sintesi scientifica che è meta ideale per le conquiste del pensiero.

Le conseguenze della teoria generale della relatività di Einstein illuminarono il Weyl sulla necessità di sottoporre ad ulteriore esame il classico problema dei fondamenti della geometria, e così, servendosi della feconda scoperta del parallelismo di Levi-Civita, continuò le celebri ricerche di Gauss-Riemann, che tendevano già a realizzare nel campo geometrico una posizione analoga a quella che, nella fisica, aveva raggiunta la teoria delle azioni a contatto di Faraday-Maxwell-Lorentz, di fronte alla teoria newtoniana delle azioni a distanza.

Si è sviluppato in tal modo, per merito del Weyl, l'importante capitolo di geometria differenziale che l'illustre Autore chiama *geometria infinitesimale pura* che in seguito fu ancora perfezionata e completata da Eddington, Cartan, Schouten, Veblen ed altri, in vista dell'investigazione geometrica dell'Universo fisico ed anche con indirizzo di interesse puramente geometrico.

Con l'opera grandiosa del Riemann, dalla geometria euclidea, con leggi aventi carattere globale e che può farsi corrispondere alla fisica delle azioni a distanza, si passò alla geometria infinitesimale delle varietà metriche che può farsi corrispondere alla fisica delle azioni per contatto. Ma quest'opera del Riemann, rimasta, salvo la voce isolata del Clifford, per qualche tempo inconsiderata e sviluppata poi con prodigiosa fecondità da Beltrami, Christoffel, Lipschitz, Helmoltz, Lie, Ricci e recentemente da Bompiani, Enea Bortolotti ecc., non rappresentava ancora l'ideale di una geometria infinitesimale perfetta, come il Weyl si accorse, per il residuo di legge globale euclidea rimasto nella geometria riemanniana, riguardante la possibilità di poter *paragonare a distanza* due elementi lineari dello spazio. Togliendo questa possibilità nacquero col Weyl le teorie infinitesimali delle connessioni metriche per quanto riguarda il trasporto dei moduli dei vettori a completamento delle teorie delle connessioni affini riguardanti il trasporto delle direzioni dei vettori.

Ma l'evidenza logica dei problemi geometrici così mirabilmente impostati da Riemann e da Weyl, ed ancor oggi in via di sviluppo, non è corroborata da una congrua spigliatezza del metodo analitico tensoriale che i suddetti Autori dovettero seguire e il Weyl stesso fa notare « il diluvio di formule e di indici » che con esso metodo si è costretti ad usare, convenendo come « sia spiacevole la fatica che si deve fare per le parti puramente formali, obbligati come siamo a dare loro un posto così vasto ». Per lo studio del campo elettromagnetico nello spazio ordinario Egli usa, come il più adatto per semplicità ed efficacia e del resto oggi universalmente riconosciuto, il metodo vettoriale, mentre per le estensioni agli spazi generalizzati, nonostante le complicazioni accennate, ricorre al calcolo tensoriale ritenendole « impossibile ad evitarsi ».

Orbene, perfezionando il metodo vettoriale si può invece portarlo ad operare negli spazi generali con la stessa speditezza ed efficacia con cui opera nello spazio ordinario, ponendo le questioni geometriche e fisico-matematiche completamente allo scoperto dalla pesante, sia pure gloriosa, pressione algoritmica tensoriale.

In questo indirizzo sono le recenti mie ricerche che, per le applicazioni già fatte, dimostrano di essere sopra una buona via. L'introduzione da me fatta nel metodo vettoriale, inteso nel senso assoluto o diretto, dell'uso sistematico dei plurivettori, mi ha permesso di dare naturale estensione a certi concetti fondamentali (come ad es. quello di rot) che finora erano stati relegati alla particolare teoria dello spazio S_3, d'introdurne opportunamente di nuovi (ad es. la divergenza di un bivettore) mediante i quali, con criterio opportuno, diverso sostanzialmente da quello seguito nello spazio ordinario, riesce possibile sviluppare un metodo vettoriale assoluto generale valevole formalmente in tutti gli spazi, qualunque sia il numero delle dimensioni. In particolare esso vale, naturalmente, anche nello spazio ordinario nel quale poi, per la speciale natura dell'ambiente, può mettersi sotto quella forma assai indovinata che abitualmente adoperiamo ma che ho dovuto abbandonare, non presentandosi adatta per l'estensione di cui ho detto.

In questa Memoria studio particolarmente gli « spazi di WEYL » nell'indirizzo assiomatico del WEYL stesso, servendomi appunto del metodo vettoriale assoluto, di cui faccio opportune nuove estensioni e mediante il quale la chiarezza intuitiva dei problemi è posta in piena luce. Così nelle varietà a connessione affine del WEYL ho introdotto la derivazione intrinseca per vettori ed omografie, estensione di quella da me già considerata per varietà riemanniane.

Con questa derivazione procedo allo studio delle geodetiche per la varietà, alla considerazione del vettore associato (dal BIANCHI introdotto per le varietà riemanniane), allo sviluppo dell'algoritmo metrico vettoriale differenziale nello spazio metrico di WEYL: rotazionale di un campo vettoriale, gradiente di un'omografia, divergenza di un bivettore, ecc.. Di tale derivazione intrinseca è conseguenza ancora una suggestiva interpretazione vettoriale assoluta della derivazione covariante tensoriale nelle varietà a connessione affine.

L'esistenza in ogni punto di una varietà a connessione affine di WEYL di un'omografia del terzo ordine (*curvatura di connessione affine*), caratterizza il distacco di essa varietà dalle varietà piane o euclidamente affini, per le quali detta iperomografia si annulla ovunque dando la condizione di integrabilità del trasporto per parallelismo. La connessione metrica, che si impone alle varietà amorfe per passare alle varietà metriche, dipende dalla introduzione, punto per punto, di una *forma metrica tarata* di vettore ed ancora di un *vettore di connessione metrica* ω.

Nello spazio metrico di WEYL, fusione di connessione metrica ed affine, per il quale il trasporto per parallelismo delle direzioni subordina il trasporto per congruenza dei moduli dei vettori, l'esistenza del bivettore $\underset{2}{\tau} = \mathrm{rot}\,\omega$, *curvatura di connessione metrica*, rappresenta il distacco dello spazio di WEYL dallo spazio metrico riemanniano per il quale detto bivettore risulta nullo in ogni punto; nel caso della *taratura normale* per lo spazio riemanniano risulta pure nullo ovunque il vettore di connessione metrica ω.

In questa Memoria vi sono quà e là passaggi al calcolo tensoriale. Sono fatti per comodità del lettore che conosce tale metodo onde possa fare i debiti confronti.