
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * Waclaw Sierpinski: Hypothèse du continu (B. Levi)
- * E. L. Ince: Cycles of reduced Ideals in quadratic Fields. Vol. IV (B. Levi)
- * H. Cartan: Sur les groupes de transformations analytiques (Beniamino Segre)
- * V. Snider, A. H. Black. L. A. Dye: Selected topics in algebraic Geometry. II (Beniamino Segre)
- * W. Lietzmann: Altes und neues vom Kreis (Beniamino Segre)
- * G. IL Hardy, J. E. Littiaewood, G. Pólya: Inequalities (Beniamino Segre)
- * A. Zygmund: Trigonometrical Series (Silvio Cinquini)
- * H Dulac: Curvas definidas por una ecuacion diferencial de primer orden y de primer grado
- * R. Estève et H. Mitault: Cours de Géométrie a l'usage des classes de seconde, première et Mathématiques de l'enseignement secondaire. T. I, Géométrie plane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 14 (1935), n.3, p. 179–192.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_3_179_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

RECENSIONI

WACŁAW SIERPINSKI: *Hypothèse du continu*. T. VI della Collezione « Monografie Matematyczne » del Seminario Matematico dell'Università di Varsavia, p. 194+VI, Warszawa-Lwow, 1934, Doll. 3,50.

Fin dal 1883 G. CANTOR credette di poter affermare (*Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, n. 5, « *Math. Ann.* », 21; « *Ges. Abhandlungen* », p. 192) che la potenza del continuo è quella della seconda classe di numeri transfiniti (e più, che la potenza dell'aggregato delle funzioni numeriche è quella della terza classe di numeri): alla prima di queste affermazioni si è dato il nome di « congettura di Cantor » « *Cantor'sche Vermutung* ». Nè il CANTOR nè altri ha potuto in seguito dimostrare la proposizione, il cui unico fondamento è tuttora la constatazione dell'insuccesso di ogni tentativo di separare dal continuo una parte non equivalente ad esso e non numerabile (onde la presunzione che giustamente al continuo debba assegnarsi una seconda potenza) avvicinata all'analoga proprietà che spetta, secondo la sua generazione, alla seconda classe di numeri transfiniti. Ma se anche, invece di una constatazione di fatto si trattasse di una dimostrazione, l'affermazione che la « seconda potenza » del continuo è quella stessa della seconda classe di numeri transfiniti, non riuscirebbe ancora che attraverso l'ammissione del postulato di ZERMELO. Di fatto più tardi il CANTOR, ammettendo senza precisa enunciazione questo postulato, e rinunciando momentaneamente alla « seconda potenza », si limitava ad affermare l'ordinabilità del continuo e quindi l'appartenenza della sua potenza alle « alef » (cfr. *Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind*, « *Ges. Abhandlungen* », p. 443).

Il SIERPINSKI non precisa, fra questi vari, un significato univoco per l'« ipotesi del continuo » di cui parla il titolo: chiama « ipotesi *H* » la più forte di tutte, e cioè la prima ricordata del CANTOR (che la potenza del continuo sia *alef-uno*); « ipotesi di CANTOR » quella più debole di tutte che non esista potenza intermedia fra il continuo e il numerabile (che forse, propriamente, così isolata non fu enunciata dal CANTOR); « problema del con-

tinuo » quello di determinare il posto della potenza del continuo nella successione delle *alef*, il qual problema presuppone l'ipotesi della « ben-ordinabilità del continuo ». Di queste varie ipotesi — e più precisamente della prima e dell'ultima, perchè assai poco noi sappiamo dedurre dalla seconda che abbiamo qualificata più debole, ma che sarebbe forse quella che potrebbe essere più universalmente accettata — egli si propone di raccogliere, in questo volume, le conseguenze e le trasformazioni equivalenti. L'argomento è vivamente interessante per chi voglia una informazione completa e ordinata sopra una massa già molto notevole di risultati dovuti principalmente alla Scuola di Varsavia e più generalmente all'indirizzo che fa capo ai *Fundamenta Mathematicae*; per chi voglia inquadrare però la ricerca in uno scopo di maggiore apertura, accenna l'A. a un punto di vista non nuovo in altre ricerche matematiche, e cioè alla speranza di incontrare la proposizione cruciale la cui dimostrazione o negazione, ottenuta per altra via, possa decidere della ammissibilità o della dimostrabilità dell'« ipotesi »; infine valorizzerebbe in altro senso il programma l'affermazione (prefazione, p. III) che le conseguenze dell'ipotesi del continuo possano considerarsi come vere praticamente per quelli che ritengano per sua natura irrisolvibile il problema del continuo.

Non ci pare di poter sottoscrivere pienamente all'attesa contenuta in queste due affermazioni: quanto alla prima, l'esperienza insegna, per es. colla storia dei fondamenti della geometria, che difficilmente le trasformazioni tautologiche portano luce dove resta oscuro il punto di partenza; nel caso speciale si deve aggiungere, come preciseremo più innanzi, che sono troppo essenziali le ipotesi supplementari: quanto alla seconda, ci pare che la sola ipotesi conciliabile con quella di una irrisolvibilità del problema del continuo sia quella della inconfrontabilità della potenza di esso con quelle degli insiemi ben-ordinati; ed in tal caso le sole conseguenze che parrebbero *praticamente vere* sarebbero quelle che seguano dall'ipotesi che ogni sottoaggregato del continuo, se ha minor potenza, è numerabile; e non sono le conseguenze di questa ipotesi che formano argomento del libro.

Dalla associazione delle proprietà caratteristiche del continuo, in particolare di quelle relative alla misura, coll'ipotesi della ben-ordinabilità (o, ciò che è lo stesso, della validità del postulato di ZERMELO), appoggiata ad una acutezza che si potrebbe qualche volta dire virtuosità logica, emergono proposizioni che hanno talora del sorprendente: così l'aggregato dei punti del piano si può scomporre in due parti, l'una di potenza minore del continuo

(numerabile) su ogni parallela all'asse x , l'altra su ogni parallela all'asse y ; quindi il continuo si scompone in una infinità (della potenza del continuo) di aggregati numerabili disgiunti; esiste una proiezione del continuo su sè stesso che trasforma gli aggregati di 1^a categoria in aggregati di misura nulla; esistono classi di aggregati caratterizzati da proprietà singolari, come: (L) l'aggregato interseca ogni aggregato perfetto non denso in un insieme di punti al più numerabile; (S) l'aggregato interseca ogni aggregato di misura nulla in un insieme al più numerabile; ecc.. Ma qual'è il significato di tali proposizioni quando il *deus ex machina* d'ogni deduzione è un ipotetico ordinamento, privo di ogni attacco nella nozione di numero? La prima proposizione citata è ben intuitiva in quanto trasporto dalla misura euclidea all'ipotetico ordinamento del fatto che la bisettrice dell'angolo degli assi lo divide in due parti di cui l'una contiene un segmento finito d'ogni parallela all'un asse e l'altra un segmento finito d'ogni parallela all'altro asse. La seconda enuncia l'esistenza di una funzione per la quale noi non abbiamo e non avremo forse mai alcuna nozione circa la dipendenza ch'essa stabilisce fra i valori di essa e quelli della variabile. La proprietà (S) non può spettare che ad aggregati non misurabili e di tali aggregati noi non sappiamo definirne analiticamente!

Nulla oppongono queste osservazioni al valore della ricerca logica: ma una discussione ci pare necessaria intorno al significato matematico.

Nella divergenza di opinioni fra i matematici che ritengono accettabile il postulato di ZERMELO e quelli contrari ha certamente avuto una grande importanza l'osservazione dell'HILBERT, fondamentale per l'assiomatica, che per decidere della non-contraddittorietà di una proposizione non dimostrabile basti accertare che essa, insieme colle altre proposizioni ammesse, non permetta di dedurre la propria negazione (o la negazione di una qualunque di queste); e che all'infuori della non contraddittorietà la logica non abbia altro criterio discriminativo. Osservazione fondamentale ed esatta e genialmente decisiva, ma che richiede pure qualche cautela. Occorre ricordare che l'ideale di una logica puramente simbolica è chimera: per quanto si possa allargare il campo della logica come sistema di relazioni fra simboli senza significato concreto, v'ha sempre un residuo ultimo di termini che debbono essere intesi nel loro significato secondo il senso comune (la loro scelta ha dell'arbitrario, ma nel modo più naturale si può esemplificare colle parole *elemento, classe, proposizione, corrispondenza,...*): di fronte alla necessità di rispettare questo senso comune anche

il criterio dell'HILBERT perde il suo carattere decisivo ed è contro questo che si urta l'ammissione illimitata del postulato di ZERMELO: quando si afferma « esiste un ordinamento » il senso comune chiede « quale? »: non è necessario che la risposta sia univoca, ma deve soddisfare a certe condizioni essenziali, altrimenti meglio varrebbe sostituire la parola (o, secondo i casi, una che ne prende il posto: « funzione » « corrispondenza » o simile) con un'altra o con un segno il cui significato resti riservato e limitato soltanto dalle relazioni simboliche: non pare che sarebbe impossibile di riordinare in questo modo molte odierne teorie in cui il postulato di ZERMELO è il cardine principale: ma si sarebbe ancora disposti a considerarle come matematica?

Parecchi anni addietro osservavo ⁽¹⁾ che il proposito di aggiungere alla teoria dei numeri reali il postulato di ZERMELO poteva paragonarsi a quello di aggiungere a questa teoria il postulato: « i numeri reali si scrivono con caratteri rossi »: la differenza in verità è immensa, ma in questo che, mentre da questo postulato grottesco nulla si potrebbe ricavare di un qualsiasi interesse, il postulato di ZERMELO ci ha dato un'ampia fioritura di ricerche *logiche*, di cui il libro del SIERPINSKI è un esempio interessante, che, lo si voglia intendere senza ironia, fanno pensare in qualche modo alla letteratura d'avventure.

B. LEVI

E. L. INCE: *Cycles of reduced Ideals in quadratic Fields*. Vol. IV della Collezione « Mathematical Tables » della British Association for the Advancement of Science, pp. 80+XVI, in 4°, London, Office of the B. Ass., 1934.

A voler calcolare effettivamente cogli ideali di un corpo algebrico è necessario di poter decidere numericamente della loro equivalenza: occorre perciò, caso per caso possedere una tabella della distribuzione di essi ideali nelle singole classi. Nel caso dei corpi quadratici di discriminante m ($m > 0$ e privo di fattori quadratici) si determina con calcoli noti, di ogni ideale un equivalente ridotto della forma $(a, b + \omega)$ $\left(\omega = \sqrt{m} \text{ ovvero } \omega = \frac{-1 + \sqrt{m}}{2} \text{ secondo che } m \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ ovvero } m \equiv 1 \pmod{4} \right)$ con $0 < \sqrt{m} - b < a$;

⁽¹⁾ *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni*. In « Scritti matematici offerti a ENRICO D'OVIDIO », Torino, Bocca, 1918. Si veda pure il mio scritto recente: *La nozione di « dominio deduttivo » e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi*. « Fundamenta Mathematicae », 1934.

$a < 2\sqrt{m}$ ovvero $a < \sqrt{m}$ nei due casi. Basta quindi possedere la tavola delle equivalenze di questi ideali ridotti. A questo provvedono le tavole in esame per i valori di $m < 2025 = 45^2$: esse forniscono anche la distribuzione in generi delle classi (che pei discriminanti qui notati non superano mai il numero di 8) e l'unità primitiva del corpo. Una introduzione contiene una chiara e breve notizia teorica sull'argomento, insieme con indicazioni sulla costruzione delle tavole ed altre storico-bibliografiche. La veste tipografica è eccellente. Cosicchè queste tavole costituiscono un contributo nuovo e pregevole alla pratica eseguibilità dei calcoli nei corpi quadratici reali.

B. LEVI

F. SEVERI: *Sobre funcions de dues variables complexes*; Barcelona, Institut d'Estudis Catalans, 1934; pp. 35.

Sotto gli auspici dell'Istituto Catalano escono ora, in veste elegante ed accurata, due Conferenze tenute dal SEVERI a Barcellona nel maggio del '33. La materia, di per sè interessante, appare qui sommamente suggestiva per le doti di brillante espositore dell'A.; al quale, d'altronde, sono dovuti molti dei risultati in discorso. La trattazione — nonostante gli stretti limiti di spazio entro cui necessariamente si svolge — riesce perspicua, e verte sui seguenti argomenti:

Raggi di convergenza associati di una serie doppia di potenze, teorema di FABRY-FABER-HARTOGS; rappresentazione geometrica delle coppie di variabili complesse; campo totale di convergenza di una serie doppia. Funzioni olomorfe di due variabili; punti singolari; trasformazioni pseudoconformi; generalizzazione del problema di DIRICHLET.

BENIAMINO SEGRE

H. CARTAN: *Sur les groupes de transformations analytiques* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, IX), Paris, Hermann, 1935; pp. 55.

Scopo principale del lavoro in esame è di stabilire le seguenti due notevoli proposizioni, già date dall'A. in una precedente Nota apparsa nei « Comptes Rendus » ⁽¹⁾:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni pseudoconformi è un gruppo di LIE (ossia è tale che si possono scegliere i parametri di guisa che la legge di composizione del gruppo si esprima analiticamente rispetto a questi).

⁽¹⁾ H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations pseudo-conformes*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », t. 196 (1933), p. 993.

Il gruppo G costituito da tutte le trasformazioni pseudoconformi biunivoche che mutano in sè in qualunque dominio limitato, appartenente allo spazio di n variabili complesse, si compone di un numero finito o di un'infinità numerabile di famiglie continue, una delle quali è un gruppo di LIE, invariante in G ; fa solo eccezione il caso in cui G è propriamente discontinuo (e quindi non contiene che un numero finito od un'infinità numerabile di trasformazioni).

Detti risultati costituiscono il punto di partenza di una recente importante Memoria di E. CARTAN ⁽¹⁾, e sono acquisiti attraverso ad un'analisi minuziosa ed accurata, che porta a precisare vari concetti (distinzione fra le nozioni di gruppo dal punto di vista locale e dal punto di vista globale, gruppi continui e quasi-continui, trasformazioni infinitesime, ecc.), ed a stabilire alcune proposizioni ausiliarie interessanti.

BENIAMINO SEGRE

V. SNYDER, A. H. BLACK, L. A. DYE: *Selected topics in algebraic Geometry*, II (Supplemental Report of the Committee on Rational Transformations); Washington, The National Research Council, 1934; pp. XII+84.

Questo numero — il 96° — del « Bulletin of the National Research Council », pur essendo solo dedicato a ricerche apparse nell'ultimo decennio intorno ad alcuni particolari argomenti di Geometria algebrica, dà sommariamente notizie su ben più di 750 lavori, fornendo allo studioso un materiale bibliografico interessante ed utile, nonostante le inevitabili involontarie omissioni. L'utilità del lavoro resta però notevolmente sminuita dalla mancanza di una direttiva precisa a guida della classificazione del contenuto per materie, e dal fatto che gli AA. neppure hanno cercato — come sarebbe stato opportuno — di porre nell'ampio quadro una prospettiva, graduando i risultati secondo l'importanza. Ne deriva che l'esposizione riesce spesso frammentaria e di dubbia efficacia; tanto più che non tutte le proposizioni enunciate risultano chiare e corrette.

I sei capitoli in cui il libro è diviso debbonsi ordinatamente agli AA. più sotto specificati, e portano i titoli seguenti:

I: V. SNYDER, *Curve e superficie rigate*. — II: L. A. DYE, *Rappresentazioni di sistemi di linee*. — III: V. SNYDER, *Sistemi di rette in S_n ; superficie irregolari*. — IV: V. SNYDER, *Trasformazioni cremoniane*. — V: V. SNYDER, *Corrispondenze multiple*. — VI: A. H. BLACK, *Superficie e varietà*.

BENIAMINO SEGRE

⁽¹⁾ E. CARTAN, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, « Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. », t. 11 (1935), p. 116.

W. LIETZMANN: *Altes und neues vom Kreis* (Math. Phys. Bibliothek, Reihe I, N. 87); Leipzig, Teubner, 1935; pp. IV+47.

Questo libriccino contiene una raccolta delle proprietà più note ed elementari relative al cerchio (*quadrangoli inscritti e circoscritti, lunghezza, area, lunule quadrabili*). La trattazione non ha carattere sistematico, e può esser seguita anche da chi non possiede che qualche reminiscenza geometrica; alcuni dei risultati sono ottenuti in più modi, mentre la dimostrazione di altri è lasciata come esercizio al Lettore. L'esposizione, pur non essendo priva di pregi didattici, è in complesso assai superficiale; sorvoliamo sugli accenni alla *nordica Kultur* ed alla *croce uncinata*!...

BENIAMINO SEGRE

G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: *Inequalities*; Cambridge, University Press, 1934; pp. XII+314.

In molti importanti capitoli di matematica, e specialmente nell'analisi moderna, giocano in modo essenziale delle disuguaglianze. Una data disuguaglianza può naturalmente venir stabilita con procedimenti disparati; sovente però, nei casi pratici, la via che a prima giunta sembrerebbe la più agevole per raggiungere la meta (p. es. l'applicazione della teoria dei massimi e dei minimi) si presenta come assai ardua, sì che occorre far uso di una tecnica speciale e di accorgimenti variabili da caso a caso.

Gli AA. di questo libro — dando nuova prova del loro virtuosismo — sono tuttavia riusciti ad amalgamare l'ampia materia in modo perfetto, inquadrandola in un'esposizione sommamente accurata, piena di eleganza e di finezze. I criteri, sempre ottimi, che li hanno guidati nella scelta degli argomenti e delle dimostrazioni, trovansi qui esposti nell'Introduzione (Cap. I); e l'uso appropriato di utili notazioni e convenzioni, conferisce alla stringata nitidezza della trattazione ⁽¹⁾.

Usando di una felice locuzione qui introdotta, si può dire che quasi tutta l'opera si occupa della comparabilità fra funzioni ⁽²⁾.

(¹) Sovente, per ragioni di spazio, alcune ipotesi sono sottintese negli enunciati; ciò è fatto in modo da non ingenerare dubbi nel Lettore, ma dev'essere tenuto presente da chi voglia adoperare il libro come opera di consultazione.

(²) Sono *comparabili* due funzioni f, g degli stessi argomenti, se è $f \leq g$ (oppure $f \geq g$) per tutti i valori reali non negativi di tali argomenti.

Il Cap. II verte sulla nozione di *media* di un numero finito di date quantità reali non negative (medie *aritmetica* e *geometrica* — ordinarie e ponderate — e loro *estensioni*), ed espone alcuni teoremi classici sull'argomento, dovuti a CAUCHY, HÖLDER, MINKOWSKI, TCHEBICHEF, ecc..

Il Capitolo III definisce nel modo più generale la *media* $\mathfrak{M}_\varphi(a) = \varphi^{-1}(\Sigma q\varphi(a))$ di un certo numero di quantità a assegnate (fatta coi pesi q) *rispetto ad una funzione* φ di cui φ^{-1} sia l'inversa, e trasporta in quest'ordine d'idee vari dei precedenti risultati, innestandoli nella teoria delle *funzioni convesse*.

Il Cap. IV espone alcune *applicazioni del calcolo* (massimi e minimi, serie di TAYLOR, ecc.). I Cap. V e VI, estendendo ulteriormente il concetto di *media* al caso di un numero infinito di quantità, trattano rispettivamente di disuguaglianze fra *serie* e fra *integrali* (di LEBESGUE o di STIELTJES).

Il Cap. VII dà alcune *applicazioni del calcolo delle variazioni*, fra cui, p. es., il teorema di WIRTINGER (con una bella dimostrazione di H. LEWY) sostanzialmente equivalente alla proprietà isoperimetrica del cerchio.

Il Cap. VIII stabilisce vari teoremi concernenti *forme bilineari e multilineari*, uno dei quali — dovuto a HILBERT e relativo alle forme bilineari $\Sigma \Sigma \frac{x_i y_j}{i+j-1}$ e $\Sigma \Sigma \frac{x_i y_j}{i-j}$ (con $i \neq j$) — viene notevolmente approfondito e generalizzato nel successivo Cap. IX.

L'ultimo Capitolo, il X, tratta dei così detti *riordinamenti*; questi — nel caso di gruppi di variabili in numero finito — si identificano colle relative permutazioni, e godono di notevoli proprietà che poi in parte vengono estese al *riordinamento di una funzione*. Fra le proposizioni del primo tipo segnaliamo solo, a titolo di esempio, quella (dovuta agli AA.) che esprime in quale ordine si debbano considerare due gruppi (x) ed (y) — ciascuno costituito da $2k+1$ quantità non negative assegnate arbitrariamente a prescindere dall'ordine — affinchè la forma bilineare

$$\sum_{r=-k}^k \sum_{s=-k}^k c_{r-s} x_r y_s \quad (c_0 \geq c_1 = c_{-1} \geq c_2 = c_{-2} \geq \dots \geq c_{2k} = c_{-2k} \geq 0)$$

assuma il suo massimo valore.

Ogni Capitolo è seguito da parecchi *complementi ed esercizi*. Inoltre alla fine del volume trovasi la *bibliografia*, alla quale si richiamano le frequenti e pregevoli notizie storiche di cui il testo è dotato.

BENIAMINO SEGNI

A. ZYGMUND: *Trigonometrical Series* (Monografje Matematyczne, Tom V; Warszawa-Lwow 1935, pp. IV+335).

Una nuova opera viene ad accrescere la letteratura di uno dei più interessanti rami dell'analisi matematica, l'importanza del quale è ben nota, oltrechè dal punto di vista teorico, anche per l'uso frequente, che vien fatto delle serie trigonometriche, nei vari rami della scienza applicata, ogniquale volta i fenomeni da studiare siano periodici.

Il rapido sviluppo, in questi ultimi anni, della teoria delle serie trigonometriche non avrebbe permesso di riunire, in una monografia della nota collezione Polacca (i cui precedenti volumi non superano le 300 pagine) tutti i risultati fino ad oggi ottenuti. L'Autore si è quindi trovato nella necessità di imporsi delle limitazioni. Si occupa soltanto delle serie in una sola variabile, dedicando poche pagine alla parte ormai ben nota della teoria, e traslascia completamente le applicazioni. Ha invece come obbiettivo, perfettamente raggiunto, di riunire e coordinare i più recenti risultati, gran parte dei quali, pubblicati nelle varie riviste ad opera di parecchi autori fra i quali lo ZYGMUND stesso, non avevano ancora trovato posto in alcuna delle opere uscite in quest'ultimo lustro.

Le serie trigonometriche generali occupano una parte molto breve del volume (alcuni paragrafi, oltre al Cap. XI), la quale, per altro, non è affatto separata, da quella, molto più ampia, dedicata alle serie di FOURIER. A proposito di queste ultime è da rilevare che la lettura dell'opera richiede soltanto la conoscenza dell'integrale del LEBESGUE, perchè l'Autore si occupa principalmente delle serie di FOURIER-LEBESGUE (tale cioè che la funzione generatrice sia integrabile nel senso del LEBESGUE), pur non traslasciando talvolta di accennare alle serie di FOURIER-DENYOJ e di FOURIER-STIELTJES.

Non è facile riassumere il contenuto del volume, diviso in dodici capitoli, alla fine di ognuno dei quali vi è una buona raccolta di interessanti complementi ed esercizi, parecchi dei quali avrebbero potuto figurare benissimo nella parte più importante del relativo capitolo, corredati o di richiami bibliografici, o di indicazioni per la risoluzione. Ci limiteremo a qualche cenno.

Il Cap. I contiene le generalità sopra le serie trigonometriche, le serie di funzioni ortogonali e normali e le serie di FOURIER.

Formano oggetto del Cap. II parecchie questioni inerenti alle serie di FOURIER (operazioni sulle serie di FOURIER, teorema di RIEMANN-LEBESGUE, per cui ogni successione di FOURIER con-

verge allo zero, principio di localizzazione di RIEMANN per le serie di FOURIER, ecc.), ma la maggior parte di esso è dedicata alla convergenza semplice ed anche uniforme delle serie di FOURIER. Fra l'altro l'Autore si propone di mettere in relazione i noti criteri di DINI, JORDAN, DE LA VALLÉE POUSSIN, YOUNG, LEBESGUE, e conclude, secondo i risultati di HARDY, che quello di LEBESGUE ne è il più generale. È da citare il recente teorema di HARDY-LITTLEWOOD, perchè in esso le ipotesi vengono formulate in parte sulla funzione generatrice e in parte sulla sua successione di FOURIER.

Fra i complementi al Cap. abbiamo l'enunciato del criterio di TONELLI, per punti singolari isolati, in una forma un po' diversa dall'originale, ma che non sembra più vantaggiosa.

Particolarmente interessante è il Cap. III, che tratta della sommazione delle serie di FOURIER, coi metodi di CESÀRO e di ABEL. Esaminando i notevoli risultati, in esso riuniti, ed ottenuti facendo uso delle medie di CESÀRO (sia di rango 1, sia di rango diverso da uno), oltrechè per le serie di FOURIER, anche per le serie coniugate (teorema di PRIVALOFF-ZYGMUND) e per le serie derivate (teorema di LEBESGUE-PRIVALOFF, YOUNG), non è possibile non rilevare quale importanza avesse la geniale idea del CESÀRO. Di essa si è giovato il FEJER, oltrechè nel suo ben noto teorema, anche in quello recentissimo per la sommazione delle serie di FOURIER di una funzione dispari, che figura verso la fine del Cap., il quale termina con un lemma, nel quale si fa ancora uso del metodo di CESÀRO, e che è, come afferma lo ZYGMUND, di importanza fondamentale per la teoria delle serie di FOURIER-STIELTJES.

Il Cap. IV si occupa delle condizioni necessarie e sufficienti, perchè una serie trigonometrica sia la serie di FOURIER di una funzione appartenente ad una determinata classe. Premesse alcune note disuguaglianze (di YOUNG, HÖLDER, MINKOWSKI, JENSEN, HARDY) e alcune considerazioni sulla convergenza in media, vengono dati, oltre al noto teorema di RIESZ-FISCHER, parecchi risultati (di YOUNG, STEINHAUS, CARATHÉODORY, ecc.), nei quali il metodo di CESÀRO ed anche quello di ABEL giocano ancora un ruolo importantissimo. Nell'ultima parte del Cap. figurano alcuni risultati sulle operazioni funzionali lineari, fra cui il teorema di BANACH-STEINHAUS, e le relative applicazioni alle serie trigonometriche, fatte, anche recentemente, da parte di parecchi Autori.

Nel Cap. V vengono studiati alcuni tipi speciali di serie trigonometriche, sia generali, sia di FOURIER. Si tratta dapprima delle serie di soli seni, e di quelle di soli coseni, dando anche delle

espressioni approssimate per la loro somma. Abbiamo poi il teorema di ZYGMUND per le serie lacunari, ed infine altri risultati, ottenuti principalmente da PALEY e ZYGMUND, giovandosi delle serie di RADEMACHER.

Il Cap. VI tratta della convergenza assoluta: per le serie trigonometriche generali abbiamo, fra l'altro, i noti teoremi di DENYOJ-LUSIN e di FATOU e per le serie di FOURIER quelli di S. BERNSTEIN, SZÁSZ, TONELLI e quelli più recenti dello ZYGMUND. Il Cap. termina con il teorema di SZIDON per le serie lacunari di FOURIER, e con i recenti risultati di WIENER per le serie di FOURIER.

Alle serie coniugate è dedicato il Cap. VII, nel quale viene ripreso il problema, a cui l'Autore già aveva accennato nel Cap. IV, delle condizioni sotto cui la coniugata di una serie di FOURIER è essa pure una serie di FOURIER. Dell'importante teorema di M. RIESZ viene data, oltre alla dimostrazione originale, quella recentissima dello STEIN. Si tratta poi della convergenza in media delle serie di FOURIER e delle loro coniugate, e infine delle serie di FOURIER di funzioni a variazione limitata insieme con la propria coniugata, studiando le relative serie di potenze.

Nel Cap. VIII si tratta delle singolarità delle serie di FOURIER di funzioni continue (esempi di FEJER, di LEBESGUE, teorema di FABER-LEBESGUE, ecc.), e di funzioni discontinue (esempio di KOLMOGOROFF) e in particolare del fenomeno di GIBBS.

Il Cap. IX è dedicato alle estensioni della formula di PARSEVAL e del teorema di RIESZ-FISCHER. Per le serie di funzioni ortogonali, normali e uniformemente limitate vengono dati i teoremi di M. RIESZ e di PALEY, e per quelle di FOURIER quello di YOUNG-HAUSDORFF (dedotto come corollario da quello di RIESZ, e dimostrato anche direttamente), e quelli di HARDY-LITTLEWOOD. Abbiamo poi la condizione necessaria e sufficiente di BANACH, perchè una successione lacunare sia una successione di FOURIER, e il teorema di WIENER che fornisce una condizione necessaria e sufficiente, perchè una funzione a variazione limitata sia continua, espressa mediante la sua successione di FOURIER. Il Capitolo termina con altri risultati, ottenuti principalmente da HARDY-LITTLEWOOD, facendo uso dell'integrazione di ordine frazionario, intesa nel senso di WEYL.

Il problema della convergenza e quello della sommabilità delle serie di FOURIER vengono ripresi nel Cap. X, da un punto di vista diverso da quello dei Cap. II e III. Circa il primo si vuol ora studiare il comportamento di una serie di FOURIER, non in un determinato punto, ma nell'intero intervallo $(0, 2\pi)$ (teorema

di HARDY-LITTLEWOOD), o in quasi tutto $(0, 2\pi)$ (teoremi di KOLMOGOROFF-SELIVERSTOFF, PLESSNER, LITTLEWOOD-PALEY). In quanto al secondo si vuol sapere sotto quali condizioni una serie di FOURIER è sommabile col metodo di CESÀRO, non mediante una media di rango determinato, ma qualunque sia il rango (teoremi di HARDY-LITTLEWOOD e di PLESSNER).

Il Cap. XI è dedicato alla teoria di RIEMANN delle serie trigonometriche generali: l'Autore si occupa della convergenza, della sommazione generalizzata di RIEMANN, dell'unicità dello sviluppo in serie trigonometrica, del principio di localizzazione di RIEMANN, ecc.

L'integrale di FOURIER è l'oggetto dell'ultimo Cap. (il XII), che è brevissimo in relazione all'importanza del problema, ma l'Autore promette, secondo la prefazione dell'opera, di rioccuparsene altrove.

Il volume termina con un breve indice delle voci usate e con una vasta bibliografia, dedicata alle serie trigonometriche ed a lavori che contengono risultati di cui lo ZYGMUND si è giovato nella redazione dell'opera.

Fra i trattati citati, che sono 17, figura, unica delle Italiane, l'opera di L. TONELLI: « *Serie trigonometriche* ». Ci sembra però che sarebbe stato doveroso citare anche il fondamentale libro del DINI: « *Serie di Fourier ecc.* », il quale, per quanto risale al 1880, rappresenta sempre il primo trattato in cui le serie trigonometriche furono studiate dal punto di vista moderno.

Le memorie citate sono poco meno di 300, appartenenti ad un centinaio di autori, fra i quali gli Italiani sono rappresentati dal TONELLI e da PIA NALLI (la quale è citata per i suoi risultati « *Sulle derivate seconde generalizzate* »).

Concludendo riteniamo l'opera dello ZYGMUND utilissima, specialmente allo studioso che già conosca la parte elementare della teoria, e voglia rapidamente mettersi al corrente dei risultati, puramente teorici, ottenuti in questi ultimissimi anni.

SILVIO CINQUINI

H. DULAC: *Curvas definidas por una ecuacion diferencial de primer orden y de primer grado*. Madrid, C. Bermejo, 1933, in-8°, pp. 180. (Senza indicazione di prezzo).

Questo volume contiene un corso di lezioni che, per invito del Laboratorio di matematica dell'Università di Madrid, il prof. H. DULAC, della Facoltà di Scienze di Lione, ha tenuto presso il laboratorio stesso nell'anno 1931-32. Argomento del corso è lo

studio delle curve integrali dell'equazione differenziale di primo ordine

$$X(x, y)dx = Y(x, y)dy,$$

dove X ed Y sono funzioni finite e continue delle due variabili x ed y in una regione R del piano xy , ed inoltre soddisfacenti alla condizione di LIPSCHITZ per le due variabili. In queste lezioni, in cui lo spunto è dato dalle classiche ricerche di BRIOT e BOUQUET e che si ispira ai ben noti lavori di POINCARÉ, di BENDIXSON e di PICARD, si tratta di giudicare dell'andamento delle curve soddisfacenti all'equazione (1) non solo localmente, ma, anche secondo studi anteriori dell'Autore, in tutta la regione R . A questo effetto, sono indicati metodi eleganti che, mediante una analisi di carattere elementare, conducono a riconoscere in quale modo si dispongano nella regione R i vari rami delle curve, i loro caratteri asintotici, il loro comportamento rispetto ai punti singolari (quelli in cui si annullano contemporaneamente la X e la Y), ecc.; tutto ciò ad un punto di vista prevalentemente qualitativo, prescindendosi dalla conoscenza effettiva degli integrali esatti dell'equazione o dalla precisione quantitativa dell'approssimazione agli elementi delle curve integrali. Numerose figure illustrano nei diversi casi l'andamento delle curve, e viene fatta l'applicazione dei metodi allo studio dei centri, fuochi e nodi, all'esame di vari esempi, a semplificazioni dell'equazione. Nell'ultima parte (Cap. V) le funzioni X ed Y sono supposte olomorfe e nulle per $x=0$, $y=0$, ed è studiato, sulla scorta dei metodi di BRIOT e BOUQUET e di BENDIXSON, il comportamento locale della curva passante per quel punto in relazione col grado dei termini di grado minimo negli sviluppi in serie di X ed Y . L'argomento dell'opera, e a dir vero, di carattere particolare, ma non di scarso interesse, ed il carattere qualitativo del soggetto vi è ampiamente e chiaramente sviluppato. (u)

R. ESTÈVE et H. MITAULT: *Cours de Géométrie à l'usage des classes de seconde, première et Mathématiques de l'enseignement secondaire*. T. I, Géométrie plane (Classe de seconde). Paris, Gauthier-Villars, 1935.

È già stato reso conto in questo « Bollettino » ⁽¹⁾ del testo di geometria dei medesimi Autori destinato a classi corrispondenti alle nostre classi 4^a e 5^a ginnasiali e 1^a liceale. Il presente volume riprende lo studio della geometria, che era fatto nei precedenti

(1) T. XIII, pag. 300.

con largo appello all'intuizione fisica, con metodo più logico; ed è con maggiore « lealtà », secondo l'espressione degli AA., che si dà esplicitamente l'enunciato dei postulati. Domina il concetto di dividere il punto di vista o « genere » *lineare* da quello *metrico*: il primo, in cui l'unità di misura dei segmenti può variare colla direzione della retta, il secondo, in cui questa unità è la medesima in tutte le direzioni. Al primo punto di vista sono ispirati i primi tre Capitoli, in cui sono dati due postulati per la retta, deducendone subito la misura dei segmenti, e tre per il piano, compreso quello delle parallele; il punto di vista metrico domina nei Capitoli IV-VIII; in entrambe le parti, la geometria del piano è trattata diffusamente, con insistenza sulle trasformazioni per simmetria, per traslazione, per omotetia, per conservazione del gruppo armonico. Il Cap. IX è dedicato alle costruzioni sia nel genere *lineare*, sia del *metrico*; il Cap. X dà la geometria piana dei vettori, il cui concetto era stato introdotto fin da principio; infine l'XI dà gli elementi della trigonometria. Nel complesso, il libro presenta un singolare carattere di novità; è però dubbio se la proposta separazione del *lineare* e del *metrico*, certamente sostenibile al punto di vista scientifico, possa riuscire didatticamente vantaggiosa. (11)
