Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Francesco Tricomi

Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali in ispecie sferici. I

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 213–218.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_213_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

PICCOLE NOTE

Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici.

Nota di FRANCESCO TRICOMI (a Torino).

Sunto. - *Si mostra come ad ogni successione di polinomi ortogonali possano associarsi una o più trasformazioni funzionali lineari, atte a facilitare lo studio dei polinomi stessi e in ispecie delle serie con essi formate. In particolare si considera il caso dei polinomi sferici ottenendo per tal via, come esempio di applicazione, due nuove formule sull'integrale ellittico di prima specie di* LEGENDRE.

1. Alcuni miei recenti lavori mostrano come alle più comuni trasformazioni funzionali lineari, siano naturalmente collegate delle classiche successioni di polinomi ortogonali: p. es. alla trasformazione di LAPLACE *ordinaria*, cioè con integrale esteso da 0 ad ∞, sono connessi i polinomi di LAGUERRE (1), mentre a quella *bilatera* (2) e alla trasformazione di GAUSS (3) si connettono i polinomi di HERMITE. Vien così fatto di domandarsi se non sia eventualmente possibile associare, in generale, ad ogni trasformazione funzionale lineare del tipo:

$$f(s) = \mathfrak{T}[F(t)] = \int_a^b K(s, t) F(t) dt \tag{1}$$

una ben determinata successione di polinomi ortogonali nell'intervallo (a, b), e viceversa.

(1) *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre.* Note I e II. [« Rend. Lincei », (6) **21** (1935[1]), 232-239 e 332-335].

(2) *Su la rappresentazione di una legge di probabilità*, ecc. [« Giorn. Ist. Ital. Attuari », **6** (1935), 135-140].

(3) *Trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione.* [« Commentarii Math. Helvetici », **7** (1935)].

Si vede però subito che a questa domanda, formulata come più sopra, è da rispondere *negativamente*. Invero, fermo restando l'intervallo (a, b), mentre le trasformazioni $\mathfrak{T}$ dipendono da una funzione arbitraria di *due* variabili: il « *nucleo* » $K(s, t)$, le successioni di polinomi ortogonali dipendono invece da una funzione arbitraria di *una* sola variabile: la così detta « *funzione-peso* » p [4]. Ne segue che ad una determinata successione di polinomi ortogonali in un intervallo (a, b):

$$\Pi_0(x), \quad \Pi_1(x), \quad \Pi_2(x), \ldots \tag{2}$$

potranno associarsi infinite trasformazioni funzionali del tipo (1), e sorge così il problema di scegliere *con giudizio* una o più di queste, avuto riguardo ai particolari problemi che si hanno di mira e a generali considerazioni di semplicità ed economia di mezzi, onde farsene ausilio nello studio dei polinomi (2) e delle serie con questi formate.

Uno dei procedimenti più spontanei per associare alla successione di polinomi (2) una determinata trasformazione del tipo (1), consiste nel costruire il relativo nucleo K mediante una *funzione generatrice* dei polinomi Π_n, e precisamente mediante una formula del tipo

$$K(s, t) = p(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Pi_n(t)\cdot s^n, \tag{3}$$

dove le a_n sono delle costanti *arbitrarie,* tali però che la serie risulti convergente ed integrabile termine a termine rispetto a t.

Invero, così procedendo, detto α_n il valore dell'integrale di $p(t)\Pi_n^2(t)dt$ fra a e b, sussisterà, se non altro, la formula notevolissima:

$$\mathfrak{T}[\Pi_n(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m \int_a^b p(t)\Pi_m(t)\Pi_n(t)dt = a_n \alpha_n s^n. \tag{4}$$

Molto sta però nella felice scelta delle costanti a_n.

2. Applicando il procedimento di cui sopra al caso dei polinomi H_n di HERMITE:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

[4] V. p. es. il recente fascicolo (n. 66) del « Mémorial des Sciences Mathém. »: J. SHOHAT (CHOKHATE), *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebychef.* (Paris, Gauthier-Villars, 1934).

che ammettono la classica funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\frac{s^n}{n!} = e^{\frac{t^2}{2}-\frac{(s-t)^2}{2}}$$

(corrispondente ad $a_n = 1/n!$) e per cui si ha:

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad p(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

si trova immediatamente

$$K(s, t) = e^{-\frac{(s-t)^2}{2}}.$$

Pertanto la corrispondente trasformazione funzionale è, dal punto di vista adottato, a prescindere da un irrilevante fattor costante ($1/\sqrt{2\pi}$), quella che ho proposto chiamare *trasformazione di Gauss*. (V. la mia Nota cit. ([3])).

Similmente, nel caso dei polinomi L_n di Laguerre:

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

per cui la funzione generatrice è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)s^n = \frac{1}{1-s}e^{\left(1-\frac{1}{1-s}\right)t}$$

($a_n = 1$) e si ha:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad p(t) = e^{-t},$$

si trova

$$K(s, t) = \frac{1}{1-s}e^{-\frac{1}{1-s}t};$$

epperò, a prescindere dal fattore $\frac{1}{1-s}$ e dall'irrilevante cambiamento di s in $\frac{1}{1-s}$, la trasformazione corrispondente è la classica trasformazione di Laplace.

Finalmente, nel caso dei polinomi sferici P_n di Legendre:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

per cui esiste la funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)s^n = \frac{1}{\sqrt{1-2st+s^2}}$$

($a_n = 1$) e si ha:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad p(t) = 1;$$

si è condotti a considerare la nuova trasformazione funzionale lineare:

$$f(s)=\int_{-1}^{1}\frac{F(t)dt}{\sqrt{1-2st+s^2}} \tag{5}$$

che, in virtù della (4), muterà $P_n(t)$ in $\frac{2}{2n+1}s^n$, essendo attualmente $\alpha_n=\frac{2}{2n+1}$.

3. La nuova trasformazione funzionale (5) presenta l'inconveniente di non comportarsi semplicemente nei riguardi dell'operazione fondamentale dell'Analisi: la derivazione. Conviene pertanto trasformare la formula cardinale:

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)dt}{\sqrt{1-2st+s^2}}=\frac{2}{2n+1}s^n$$

in modo da ottenere, se possibile, una trasformazione più maneggevole.

Tale intento può conseguirsi eseguendo la sostituzione

$$t=\cos\theta,\quad s=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

invero per tal via, con calcoli nei cui particolari non entriamo perchè le formule finali non sono nuove, si trovano le formule:

$$\int_{0}^{\varphi}\frac{P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{n+\frac{1}{2}},\quad \int_{\varphi}^{\pi}\frac{P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{n+\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

$$(0\leq\varphi\leq\pi),$$

donde, tornando a scrivere t in luogo di $\cos\theta$ e ponendo $\cos\varphi=\sigma$, segue:

$$\int_{\sigma}^{1}\frac{P_n(t)dt}{\sqrt{2(t-\sigma)}}=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,cos}\sigma\right]}{n+\frac{1}{2}},\quad \int_{-1}^{\sigma}\frac{P_n(t)dt}{\sqrt{2(\sigma-t)}}=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arc\,cos}\sigma\right]}{n+\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$(-1\leq\sigma\leq1).$$

Queste formule non sono, come si diceva, sostanzialmente nuove. Invero, risguardando le (7) come due equazioni integrali in $P_n(t)$ ed applicando ad esse la formula di ABEL (5), esse si trasformano subito nelle altre:

$$(8)\quad P_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_t^1 \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos\sigma\right]}{\sqrt{2(\sigma-t)(1-\sigma^2)}}\,d\sigma,\quad P_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^t \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos\sigma\right]}{\sqrt{2(t-\sigma)(1-\sigma^2)}}\,d\sigma,$$

$$(-1\leq t\leq 1),$$

che, riscrivendo $\cos\theta$ al posto di t e $\cos\varphi$ al posto di σ, si riducono alle classiche formule di MEHLER (6):

$$(9)\quad P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}},\quad P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}},$$

$$(0\leq\theta\leq\pi).$$

Le precedenti formule (7) e (8) (riferiamoci, per fissar le idee, in entrambi i casi alla seconda formula) mostrano come *la trasformazione funzionale lineare*

$$(10)\quad \boxed{f(s)=\mathbf{T}[F(t)]=\int_{-1}^{s}\frac{F(t)dt}{\sqrt{s-t}}}$$

muti l'n-esimo polinomio sferico $P_n(t)$ *nella funzione assai semplice*

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1/2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos s\right],$$

e, reciprocamente, la funzione

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos t\right]}{\sqrt{1-t^2}}$$

nell'n-esimo polinomio sferico $P_n(s)$.

La trasformazione funzionale (5) può dunque rimpiazzarsi, nello studio dei polinomi sferici, con la (10) che, come vedremo, gode di proprietà assai semplici ed eleganti.

(5) V. p. es. V. VOLTERRA, *Équations intégrales.* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pp. 34-37.

(6) V. p. es. E. W. HOBSON, *Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* (Cambridge, University Press, 1934), pp. 26-27.

Più generalmente, nel caso dei *polinomi sferici generalizzati* o *funzioni di Gegenbauer* C_n^ν, definibili ([7]) mediante la formula

$$(11)\qquad C_n^\nu(t) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\cdot n!} F\left(-n.\ n+2\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \frac{1-t}{2}\right)$$

dove F denota la classica funzione ipergeometrica di GAUSS ([8]), pei quali valgono (se $\nu > 0$) le seguenti *formule di Mehler generalizzate* ([9]):

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} C_n^\nu(\cos\theta) &= \frac{2^{1-\nu}\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma^2(\nu)\cdot n!}(\sin\theta)^{1-2\nu}\int_0^\theta \frac{\cos(n+\nu)\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu}}\,d\varphi \\ C_n^\nu(\cos\theta) &= \frac{2^{1-\nu}\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma^2(\nu)\cdot n!}(\sin\theta)^{1-2\nu}\int_\theta^\pi \frac{\cos[(n+\nu)\varphi-\nu\pi]}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1-\nu}}\,d\varphi\ ; \end{aligned}\right.$$

dovrà considerarsi, in luogo della (10), la trasformazione più generale

$$(13)\qquad \boxed{f(s) = \mathfrak{T}^{(\alpha)}[F(t)] = \int_{-1}^{s} \frac{F(t)dt}{(s-t)^{\frac{1}{2}+\alpha}},\quad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right),}$$

che per $\alpha = 0$ si riduce alla (10) ($\mathfrak{T}^{(0)} \equiv \mathfrak{T}$).

(continua)

([7]) Per le funzioni C_n^ν può vedersi: E. HEINE, *Kugelfunktionen* (Berlin, Reimer, 1878), I, p. 297; i due articoli: II[5], 28 (WANGERIN-LAMBERT, *Fonctions sphériques*) e II[5], 28[a] (APPELL-LAMBERT, *Généralisations diverses des fonctions sphériques*) dell'« Encycl. des sciences math. », (éd. fr.); e il Cap. III della mia Memoria del 1923 sulle equazioni a derivate parziali di tipo misto. [« Mem. Lincei », (5) **14** (1923), 134-247].

([8]) Dalla (11) segue fra l'altro $C_n^{\frac{1}{2}}(t) \equiv P_n(t)$ e che le funzioni C_n^ν sono legate alle funzioni sferiche generalizzate P_n^m considerate da HOBSON (op. cit.) e da altri, dalla relazione

$$C_n^\nu(t) = \frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(n+1)}(1-t^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}} P^{\frac{1}{2}-\nu}_{n+\nu-\frac{1}{2}}(t),\qquad (0 < t < 1).$$

([9]) Facilmente ottenibili generalizzando il procedimento che ci ha condotti alle (9), oppure trasformando le analoghe formule date da HOBSON per le funzioni P_n^m. (Op. cit., p. 266 e seg.).