Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Achille Bassi

Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni. I

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 219–225.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni.

Nota di ACHILLE BASSI (a Torino).

Sunto. - *Si osserva che un'affermazione del* DEHN, *secondo la quale ogni varietà chiusa, ad* n *dimensioni è reticolabile mediante un complesso costituito al più di quattro* n*-elementi, è inesatta, e che il numero minimo di* n*-elementi con i quali si può reticolare ogni* n*-varietà chiusa è invece almeno uguale ad* $n+1$.

Il DEHN nella sua Memoria intitolata: *Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes* (1), dopo aver dimostrato (pagg. 165–167) che il continuo costituito da una qualsiasi varietà chiusa (priva di contorno), a tre dimensioni, può essere reticolato da un complesso costituito di quattro 3-elementi (2), afferma che si può provare con facilità, con lo stesso procedimento di cui egli si vale, che ogni varietà ad n dimensioni può essere reticolata da un complesso costituito di quattro n-elementi (3).

Questa affermazione contrasta con alcuni risultati cui pervenni in due miei lavori (4), e che sono una facile conseguenza di altri del LUSTERNIK e dello SCHNIRELMANN.

(1) « Mathematische Annalen », Band 69, 1910, pagg. 137-168.

(2) Un n-elemento è un complesso, una cui suddivisione ha (per un opportuno ordinamento dei suoi simplessi) le stesse matrici di incidenza di una suddivisione di un n-simplesso (vedi su ciò, ad esempio, J. W. ALEXANDER, *The combinatorial theory of complexes* « Annals of Mathematics », serie 2ª, vol. 31, 1931, pagg. 294-322; lavoro che citerò in seguito con J. W. ALEXANDER). Da un notevole recentissimo lavoro del NÖBELING (*Zur Topologie der Mannigfaltigkeiten*, « Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 42, 1935, pagg. 117-152) si ricava, tra altri importanti risultati, che ogni complesso che, come insieme di punti, è omeomorfo ad un n-simplesso è un n-elemento.

(3) Egli infatti, svolta la dimostrazione della proprietà sopra accennata, aggiunge che (cap. III, pag. 167, ultime righe del § 1): « *Es sei nur bemerkt dass sich diese Ueberlegungen unmittelbar auf beliebig viele Dimensionen erweitern lassen, woraus unter anderm folgt, dass jede homogene* M_n, *für jedes beliebige* n, *sich aus vier Elementarmannigfaltigkeiten zusammensetzen lässt...* ».

(4) *Sulla riemanniana dell'* S_n *proiettivo* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo LVI, 1932, pagg. 228-237, n. 4) e *Un problema topologico di esistenza* (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1935, pagg. 669-714, n. 18).

Nel secondo di questi lavori mi ripromisi quindi di prendere in esame l'affermazione del DEHN, per mostrarne l'inesattezza ([5]).

Qui infatti esamino il motivo per cui le considerazioni del DEHN, che giungono a conclusioni esatte nel caso di $n=3$, non si possono estendere, se $n>3$, a dimostrare quanto questo Autore afferma. Espongo inoltre, con opportuni schiarimenti, le considerazioni del LUSTERNICK e dello SCHNIRELMANN, su cui si basano i miei risultati, considerazioni che si svolgono nel campo delle più recenti teorie di topologia delle varietà.

Viene così chiaramente dimostrata l'esattezza dei miei risultati e quindi l'inesattezza dell'affermazione del DEHN. Precisamente viene dimostrato che, indicato con μ il numero minimo di n-elementi di cui è costituito un complesso che reticola una n-varietà, e indicato con μ_n il valore massimo che la μ assume nelle varietà ad n-dimensioni, μ_n, se è finito, è $\geq n+1$. Questo risultato è quindi in contraddizione, per ogni $n>3$, con l'affermazione del DEHN, secondo cui sarebbe $\mu_n \leq 4$.

In un prossimo lavoro dimostrerò, con più precisione, che $\mu_n = n+1$.

I.

1. Il procedimento di dimostrazione del DEHN (che qui espongo per le varietà ad n dimensioni, precisandolo ulteriormente, in modo da renderlo completamente rigoroso) è il seguente:

Sia A una n-varietà simpliciale del BROUWER ([6]), connessa, chiusa (cioè priva di contorno), e in cui mai due simplessi distinti abbiano gli stessi vertici.

Si consideri in essa un n-simplesso s_1, poi un altro n-simplesso s_2, avente in comune con s_1 un $(n-1)$-simplesso b_1 del contorno di entrambi, indi un terzo n-simplesso s_3, avente un suo $(n-1)$-simplesso contorno b_2 in comune con il contorno dell'insieme $A_2 = s_1 + s_2$, di s_1 e di s_2, e così si prosegua. Poichè la varietà A è connessa e quindi, come insieme di n-simplessi, è completamente connessa ([7]),

([5]) Vedi il secondo lavoro citato, annotazione n. 9.

([6]) La definizione trovasi in L. E. J. BROUWER, *Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten* (« Mathematische Annalen », Band 71, 1912, pagg. 97-115); vedasi anche A. BASSI, *Su di alcuni modelli topologici del Poincaré* (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1935, n. 2).

([7]) È cioè tale che, dati in A due qualsiasi n-simplessi, si può trovare una successione di n-simplessi di A avente come primo e come ultimo elemento i due n-simplessi considerati, e nella quale due simplessi qualsiansi consecutivi abbiano un $(n-1)$-simplesso contorno (almeno) in comune.

il procedimento considerato può proseguirsi fino ad avere esaurito tutti gli n-simplessi di A. Questi si possono perciò ordinare in una successione $s_1, s_2, \dots s_{\alpha(n)}$, nella quale, indicato con $A_i = s_1 + s_2 + \dots + s_i$ l'insieme degli n-simplessi $s_1, s_2, \dots s_i$, A_i ed s_{i+1} abbiano in comune, per $i = 1, 2, \dots \alpha(n) - 1$ un $(n-1)$-simplesso (almeno) b_i, del contorno di entrambi.

Supponiamo che A_i sia un n-elemento $\mathfrak{A}_i$. Se A_i ed s_{i+1} hanno in comune solamente b_i, per proprietà note (8), anche $A_{i+1} = \mathfrak{A}_i + s_{i+1}$ è un n-elemento $\mathfrak{A}_{i+1}$; nel caso contrario, A_{i+1} potrà sempre considerarsi un n-elemento $\mathfrak{A}_{i+1}$, quando si suppongano distinti tutti i k-simplessi $(k = 0, 1, \dots n-1)$ c_i, non appartenenti a b_i, che $\mathfrak{A}_i$ ed s_{i+1} hanno in comune. Si può dimostrare che ogni c_i appartiene, oltre che al contorno di s_{i+1}, anche a quello di $\mathfrak{A}_i$ (9). Ogni c_i viene quindi

(8) Vedi ad esempio, J. W. ALEXANDER, corollario [14:3a].

(9) Infatti procedendo per induzione, ammettiamo verificata la proprietà (vera per i primi valori della $\bar{i}$) che per ogni $i \leq \bar{i}$ tutte le coppie dei k-simplessi di $\mathfrak{A}_i$, che occorre fare coincidere per ottenere la A_i dalla $\mathfrak{A}_i$, appartengano al contorno di $\mathfrak{A}_i$, e dimostriamo che questa proprietà è verificata anche per $i = \bar{i} + 1$.

Supponiamo che un k-simplesso σ_k, appartenente al contorno di s_{i+1}, e non contenuto in b_i, sia *interno* ad $\mathfrak{A}_i$. Il suo complesso avvolgente rispetto ad $\mathfrak{A}_i$ (cioè il suo *linked complex*; vedi su ciò, ad esempio, S. LEFSCHETZ, *Topology*, « American Mathematical Society, Colloquium Pubblications », vol. XII, cap. III, § 1) sarà quindi una $(n-k-1)$-sfera S, e il suo complesso avvolgente rispetto a s_{i+1} sarà un $(n-k-1)$-elemento E. Ora, per ottenere da $\mathfrak{A}_i$ la A_i, occorrerà fare coincidere alcune coppie di simplessi di $\mathfrak{A}_i$. Dico che nessuna di tali coppie appartiene ad S. Infatti poichè, per le ipotesi fatte sulla A, non possono esistere in A_i due simplessi distinti aventi gli stessi vertici, nella trasformazione di $\mathfrak{A}_i$ in A_i, verrebbero a coincidere i due simplessi della stella di centro s_k, che sono il collegamento (*join*, vedi su ciò, ad esempio, il trattato ora citato del LEFSCHETZ, pag. 110, od anche A. BASSI, *Su di una notevole operazione topologica tra complessi.* « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. LXXIII, 1935) di σ_k e dei due simplessi considerati di S. Questi due simplessi sarebbero *interni* ad $\mathfrak{A}_i$, contrariamente all'induzione fatta.

Da ciò segue che, indicato con σ_k^* quel k-simplesso di A_i, da cui proviene σ_k nella operazione che trasforma A_i in $\mathfrak{A}_i$, il complesso avvolgente S^* di σ_k^* rispetto ad A_i sarà congruente ad S, e sarà quindi una $(n-k-1)$-sfera S^*. Sia E^* l'$(n-k-1)$-elemento, complesso avvolgente di s_r, rispetto ad s_{i+1}. E^* è certamente distinto dagli $(n-k-1)$-simplessi di S^*, altrimenti, se E^* coincidesse con un $(n-k-1)$-simplesso F^* di S^*, poichè i simplessi di A aventi gli stessi vertici coincidono, coinciderebbero i complessi collegamento di σ_k^* con E^* e con F^*, e quindi s_{i+1} coinciderebbe con un n-simplesso di A_i, cosa assurda.

Ora $S^* + E^*$ è il complesso avvolgente di σ_k^* rispetto ad A_{i+1}, ed è a determinare una coppia di simplessi distinti c_i' e c_i'', appartenenti al contorno di $\mathfrak{A}_{i+1}$.

Ora, poichè A_1 e A_2 sono già degli n-elementi, i successivi A_3, $A_4, \ldots, A_{\alpha(n)} = A$ risulteranno anch'essi rispettivamente degli n-elementi $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots, \mathfrak{A}_{\alpha(n)} = \mathfrak{A}$ qualora in A_3 si suppongano distinti i simplessi c_2 (il che riduce appunto A_3 ad $\mathfrak{A}_3$), in A_4 si suppongano distinti dapprima i simplessi c_2 (il che riduce A_n ad $\mathfrak{A}_3 + s_4$) e poi i simplessi $c_3, \ldots$, in A si suppongano distinti successivamente i simplessi $c_2, c_3, \ldots, c_{\alpha(n)-1}$. Viceversa, data la $\mathfrak{A}$, per riottenere la A basterà fare successivamente coincidere le coppie $c'_{\alpha(n)-1}$ e $c''_{\alpha(n)-1}$ del contorno di $\mathfrak{A}$ (con che la $\mathfrak{A}$ diviene la $\mathfrak{A}_{\alpha(n)-1} + s_{\alpha(n)}$), indi le $c'_{\alpha(n)-2}$ e $c''_{\alpha(n)-2}$ (con che la $\mathfrak{A}$ diviene la $\mathfrak{A}_{\alpha(n)-2} + s_{\alpha(n)-1} + + s_{\alpha(n)}$), ecc..

È da osservarsi che, in questo procedimento, un simplesso c_i' del contorno di $\mathfrak{A}_i$, che, insieme ad un c_i'', provenga da un simplesso di $\mathfrak{A}_{i-1} + s_i$, supposto distinto, può a sua volta originare due distinti simplessi c'_{i+1} e c''_{i+1} del contorno di $\mathfrak{A}_{i+1}$. Sicchè un k-simplesso di A può originare, nel procedimento di riduzione di A ad $\mathfrak{A}$, un numero di k-simplessi di $\mathfrak{A}$ maggiore di due (al più tanti quanti sono gli n-simplessi della stella di A, che ha per centro il k-simplesso considerato; quindi un $(n-1)$-simplesso ne origina al più due).

2. Consideriamo ora in A l'$(n-1)$-complesso D, dei simplessi c_i, che originano tutti i simplessi del contorno $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{A}$. Poichè $\mathfrak{D}$ è

quindi una parte del complesso avvolgente di σ_k^* rispetto ad A. Quest'ultimo complesso avvolgente sarà quindi costituito di S^* e di un complesso T^* contenente E^*. Esso è d'altra parte una $(n-k-1)$-sfera; quindi $S^* + T^*$ sarebbe una $(n-k-1)$-sfera. Si consideri allora una successione (certo esistente) di $(n-k-1)$-simplessi e di $(n-k-2)$-simplessi, alternativamente presi, di $S^* + T^*$, di cui due qualsiansi successivi siano incidenti, e che abbia come primo e come ultimo elemento, rispettivamente, un $(n-k-1)$-simplesso E_1 di S^* e l'$(n-k-1)$-simplesso $E^* = E_r$; in essa, tra gli $(n-k-2)$-simplessi che sono seguiti da un $(n-k-1)$-simplesso che non appartenga ad S^* (ve n'è certamente almeno uno di questi $(n-k-2)$-simplessi, tale essendo E_{r-1}), si consideri il primo di questi, E_j. Esso appartiene certamente ad S^*, altrimenti neppure E_{j-1} potrebbe appartenervi e quindi E_{j-2} godrebbe della stessa proprietà di E_j, pur precedendo E_j. Quindi E_j sarebbe sul contorno di due $(n-k-1)$-simplessi di S^*, e poichè è anche sul contorno di E_{j+1}, che non appartiene a S^*, vi sarebbero almeno tre $(n-k-1)$-simplessi di $E^* + T^*$ incidenti ad E_j, cosa assurda, essendo $E^* + T^*$ una $(n-k-1)$-sfera.

completamente connesso e in essa ogni k-simplesso, se $k<n-1$, appartiene al contorno di almeno un $(n-1)$-simplesso di $\mathfrak{D}$, anche D gode di queste proprietà, poichè esse non si perdono nelle operazioni che trasformano $\mathfrak{D}$ in D.

Sia ora K_1 l'1-complesso di tutti gli 1-simplessi di D e sia I_1 l'intorno di K_1 in A. Questo intorno, come nel caso di $n=3$ osserva il DEHN, *è sempre decomponibile nell'insieme di due* n*-celle.*

Per brevità, dò qui solo una giustificazione intuitiva di questa affermazione, con considerazioni di topologia del continuo, facilmente sostituibili con una rigorosa dimostrazione di topologia combinatoria.

Per le proprietà osservate di D_1, K_1 consta dei circuiti, in numero di p, che contornano ciascuno un 2-simplesso di D, ed è connesso. Si può allora ammettere che I_1 rimanga omeomorfo a sè stesso quando si deformano con continuità i p circuiti, in modo che essi escano tutti da uno stesso punto P di A, fuori del quale non abbiano altri punti in comune. I_1 viene allora ad essere costituito dall'intorno di P in A, cioè da una n-cella C_n, che potremo supporre rappresentata da un solido sferico ad n-dimensioni, alla quale sono attaccati p tubi cilindrici, ciascuno dei quali è l'intorno, fuori di C_n, di uno dei p circuiti. Il solido così ottenuto è orientabile o no, secondo che tale è la sua varietà contorno, e si verifica l'uno o l'altro caso a seconda del modo con cui sono saldati i tubi al contorno di C_n.

È ora chiaro che, se si manda in C_n una parete divisoria, corrispondente ad un piano diametrale del solido sferico considerato, e se si suppone (il che non è restrittivo) che le due saldature di ciascun tubo siano ciascuna in una delle due parti connesse, in cui la parete divisoria suddivide il contorno di C_n, questa parete, ed altre, che suddividano ciascuna uno dei tubi cilindrici [10], spezzano I_1 in due n-celle.

In queste considerazioni si è fatto uso sostanziale, circa K_1, della sola ipotesi che esso sia *connesso*. Quindi anche l'intorno di ogni 1-complesso connesso di A è suddivisibile in due n-celle.

Il DEHN, nella sua dimostrazione che ogni varietà chiusa a tre dimensioni è spezzabile in quattro 3-celle, si fonda sostanzialmente sulla proprietà di I_1, ora osservata.

[10] Rappresentato ciascun tubo cilindrico mediante il prodotto topologico di una $(n-1)$-cella per un segmento, una parete divisoria idonea allo scopo è, ad esempio, quella rappresentata dal prodotto topologico della $(n-1)$-cella considerata per un punto interno al segmento.

Se $n=3$, si consideri infatti, col DEHN, oltre la I_1, anche la $\overline{A-I_1}$ (11). Essa può ottenersi dalla 3-cella $\mathfrak{A}$ quando si tolgano ad essa i punti di un intorno del complesso $\mathfrak{K}_1$ costituito da tutti gli 1-simplessi del contorno $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{A}$, e quando, indicate con $\bar{c}_2'$ e $\bar{c}_2''$ rispettivamente, le parti residue dei 2-simplessi c_2' e c_2'' di $\mathfrak{D}$, parti residue che sono bicelle, si identifichino tutti i punti di ogni coppia $\bar{c}_2'$ e $\bar{c}_2''$ che provengano da un sol punto di D. Poichè le $2p$ bicelle $\bar{c}_2'$ e $\bar{c}_2''$ non hanno tra loro alcun punto in comune, il solido che si ottiene mediante le identificazioni considerate è costituito ancora da un solido sferico cui sono saldati p tubi cilindrici, ciascuno dei quali è generato dalla saldatura di una coppia di bicelle. Esso sarà quindi ancora spezzabile in due 3-celle. A risulta quindi spezzabile in quattro 3-celle, ed il teorema del DEHN è quindi provato per $n=3$.

Ma ora risulta altresì chiaro perchè questo teorema non sia valido appena $n>3$. Infatti, in questo caso, quando al contorno di $\mathfrak{D}$ si sottraggano i punti di un intorno di $\mathfrak{K}_1$, la parte residua non è più spezzata in $2p$ $(n-1)$-celle non connesse, ma è anzi completamente connessa, e nulla ci autorizza a credere che, eseguite le saldature necessarie per ottenere l'$\overline{A-I_1}$, questa varietà abbia ancora la struttura di un solido sferico con p tubi cilindrici, e sia perciò spezzabile in due celle.

Le conclusioni del DEHN risultano quindi ingiustificate se $n>3$. Ciò può vedersi anche così: se $n=3$, spezzato $\mathfrak{A}$ con un piano diametrale e supposto, il che non è restrittivo, che, in ogni coppia di bicelle $\bar{c}_2'$ e $\bar{c}_2''$, queste siano ciascuna in una delle due parti connesse in cui è spezzato il contorno $\mathfrak{D}$, $\overline{A-I_1}$ risulta un intorno I_1' dell'1-complesso connesso, duale del reticolato di $\overline{A-I_1}$, costituito dalle due 3-celle ottenute dalla suddivisione di $\mathfrak{A}$, e dalle p 2-celle ottenute identificando, nel modo già detto, i punti di $\bar{c}_2'$ e di $\bar{c}_2''$. Si ricava da ciò di nuovo, per una proprietà già rilevata degli intorni degli 1-complessi connessi di A, che $I_1'=\overline{A-I_1}$ è spezzabile in due 3-celle. Ma se $n>3$, le osservazioni ora fatte, debitamente estese, mostrano che $\overline{A-I_1}$ è l'intorno I_{n-2} di un $(n-2)$-complesso, duale di un conveniente reticolato di $\overline{A-I_1}$, e che in generale, indicato con I_i l'intorno, rispetto ad A, del complesso K_i di tutti gli i-simplessi di D, si ha che $\overline{A-I_i}=I'_{n-i-1}$, ove I'_{n-i-1} è l'intorno di un $(n-i-1)$-complesso *duale* di un reticolato di $\overline{A-I_i}$. Quindi A può sempre decomporsi nell'insieme di due intorni I_i ed I'_{n-i-1}, di due complessi opportuni ad i e ad

(11) Cioè la varietà ottenuta sottraendo ad A i punti di I_1, e completata con i suoi punti limiti rispetto ad A.

$n-i-1$ dimensioni di un reticolato della A ([12]). Ora, mentre l'intorno I_1 di un K_1 connesso di A è, come si è accennato, decomponibile in due celle, nulla ci permette di credere che altrettanto avvenga per gli intorni I_i, quando $i > 1$, e, come vedremo, ciò in generale, non è vero. Il teorema del DEHN è quindi provato solo quando $i = n - i - 1 = 1$, cioè quando $n = 3$.

L'affermazione del DEHN è quindi ingiustificata. Mostriamo che essa è anche inesatta.

(continua)

([12]) Una decomposizione di A in due intorni del tipo detto si può ottenere senza difficoltà anche senza ricorrere al procedimento del DEHN.