Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Scorza Dragoni

Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 225–230.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_225_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Napoli).

Sunto. - *Si estende ai sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine un criterio, relativo a un problema di valori ai limiti, già dato per una sola equazione differenziale.*

Fra i risultati conclusivi di una ricerca sulle equazioni differenziali del secondo ordine — ricerca in cui miravo a dare condizioni sufficienti per l'esistenza, in grande, di un integrale assumente valori determinati in due punti distinti — ho dato [1] il seguente teorema:

Se la funzione f(x, y, y') *è continua e limitata nell'insieme*

$$a \leq x \leq b, \quad p(x) \leq y \leq q(x), \quad -\infty < y' < +\infty;$$

se p(x) *e* q(x) *sono due volte derivabili nell'intervallo* $a \leq x \leq b$; *e se*

$$\begin{aligned} p''(x) &\geq f(x, p(x), y'), \quad \text{per} \quad y' \leq p'(x), \\ q''(x) &\leq f(x, q(x), y'), \quad \text{per} \quad y' \geq q'(x), \end{aligned} \tag{1}$$

oppure

$$\begin{aligned} p''(x) &\geq f(x, p(x), y'), \quad \text{per} \quad y' \geq p'(x), \\ q''(x) &\leq f(x, q(x), y'), \quad \text{per} \quad y' \leq q'(x); \end{aligned} \tag{2}$$

allora esiste sempre un integrale, y(x), *della*

$$y'' = f(x, y, y')$$

[1] G. SCORZA DRAGONI, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine* [« Mathematische Annalen », vol. 105 (1931), pagg. 133-143], nn. 3 e 4.

che verifichi le condizioni

$$y(x_0)=h, \quad y(x_1)=k,$$

naturalmente purchè

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b, \quad p(x_0) \leq h \leq q(x_0), \quad p(x_1) \leq k \leq q(x_1) \text{ (}^1\text{)}.$$

In questa Nota mi propongo di mostrare come, sia il criterio, che i ragionamenti svolti per giustificarlo valgano sostanzialmente anche per i sistemi di due (o più) equazioni differenziali del secondo ordine.

Negli enunciati che darò, come in quello del teorema ricordato ([2]), supporrò soddisfatte tutte le ipotesi di regolarità che permettano di dare delle dimostrazioni complete ma brevi.

Una notevole rapidità sarà poi raggiunta, qui, come nella mia Nota citata, utilizzando alcune considerazioni di analisi funzionale dovute a BIRKHOFF, KELLOG e CACCIOPPOLI ([3]).

1. Premettiamo il lemma seguente:

Se

$$\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2'),$$

dove i $=1, 2$, *sono due funzioni continue e limitate nell'iperstrato*

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y_i < +\infty, \quad -\infty < y_i' < +\infty \qquad (i=1, 2),$$

esiste sempre una coppia di soluzioni, $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$, *del sistema*

$$y_i''=\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

che soddisfaccia alle condizioni

$$y_i(x_0)=h_i, \quad y_i(x_1)=k_i,$$

se $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, h_i *e* k_i *essendo numeri reali arbitrari,*
la dimostrazione del quale si costruisce immediatamente seguendo la stessa via tenuta da CACCIOPPOLI per giustificare il lemma analogo, relativo a una sola equazione differenziale del secondo ordine ([4]).

([1]) Si noti, cosa che non avevo fatto rilevare, che il teorema è sempre valido, anche se sono soddisfatte la prima delle (1) e la seconda delle (2), oppure la prima delle (2) e la seconda delle (1). Ciò segue senz'altro dai ragionamenti svolti nei passi or ora citati.

([2]) Circa delle possibili estensioni, si vegga il n. 5 della mia Nota citata.

([3]) R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* [« Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », serie VI, vol. XI (1930), pagg. 794-799]; G. D. BIRKHOFF e O. D. KELLOG, *Invariant points in function space* [« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 23 (1922), pagg. 96-115].

([4]) Loc. cit., n. 2.

Naturalmente questo sarà possibile una volta che il teorema d'esistenza sulle soluzioni dell'equazione funzionale

$$g(x) = G[g(x)],$$

là indicato da CACCIOPPOLI [1], sia stato esteso alle soluzioni del sistema di equazioni funzionali

$$g_1(x) = G_1[g_1(x), g_2(x)], \quad g_2(x) = G_2[g_1(x), g_2(x)];$$

per il che basta ripetere punto per punto la dimostrazione di CACCIOPPOLI, con quei semplici cambiamenti di parole, resi necessari dall'aumentato numero dei funzionali in giuoco e delle funzioni da cui i funzionali dipendono.

2. Dopo questo è facile dedurre che:

Se le due funzioni

$$f_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2'), \quad f_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

sono continue e limitate nell'insieme

$$I: a \leq x \leq b, \quad p_i(x) \leq y_i \leq q_i(x), \quad -\infty < y_i' < +\infty \qquad (i = 1, 2);$$

se $p_i(x)$ *e* $q_i(x)$ *sono due volte derivabili nell'intervallo* $a \leq x \leq b$; *se*

$$(3) \qquad \begin{aligned} p_1''(x) &\geq f_1(x, p_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \text{per} \quad y_1' \leq p_1'(x), \\ q_1''(x) &\leq f_1(x, q_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \text{per} \quad y_1' \geq q_1'(x), \end{aligned}$$

con $a \leq x \leq b$, $p_2(x) \leq y_2 \leq q_2(x)$ *e* y_2' *qualunque; e se*

$$(4) \qquad \begin{aligned} p_2''(x) &\geq f_2(x, y_1, y_1', p_2(x), y_2'), \quad \text{per} \quad y_2' \leq p_2'(x), \\ q_2''(x) &\leq f_2(x, y_1, y_1', q_2(x), y_2'), \quad \text{per} \quad y_2' \geq q_2'(x), \end{aligned}$$

con $a \leq x \leq b$, $p_1(x) \leq y_1 \leq q_1(x)$ *e* y_1' *qualunque; allora esiste sempre una coppia di integrali,* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$, *del sistema*

$$y_i'' = f_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

che soddisfaccia alle condizioni

$$y_i(x_0) = h_i, \quad y_i(x_1) = k_i,$$

purchè naturalmente

$$a \leq x_0 < x_1 \leq b, \quad p_i(x_0) \leq h_i \leq q_i(x_0), \quad p_i(x_1) \leq k_i \leq q_i(x_1).$$

Prolunghiamo infatti f_i, e diciamo φ_i la funzione prolungata, in tutto l'iperstrato

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y_i < +\infty, \quad -\infty < y_i' < +\infty$$

[1] Loc. cit., n. 1.

ponendo

$$(5)\qquad \varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x_1, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

in I; e, quando $y_1 < p_1(x)$,

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, p_1(x), y_1', p_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 < p_2(x),\\ &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, p_1(x), y_1', q_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 > q_2(x),\\ &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, p_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \text{se} \quad p_2(x) \leq y_2 \leq q_2(x), \end{aligned}$$

quando $y_1 > q_1(x)$,

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, q_1(x), y_1', p_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 < p_2(x),\\ &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, q_1(x), y_1', q_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 > q_2(x),\\ &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, q_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \text{se} \quad p_2(x) \leq y_2 \leq q_2(x), \end{aligned}$$

quando $p_1(x) \leq y_1 \leq q_1(x)$,

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, y_1, y_1', p_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 < p_2(x),\\ &\varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = f_i(x, y_1, y_1', q_2(x), y_2'), \quad \text{se} \quad y_2 > q_2(x). \end{aligned}$$

Allora esiste sempre — vedi n. 1 — una coppia di integrali, $y_1 = \eta_1(x)$ e $y_2 = \eta_2(x)$, del sistema

$$y_i'' = \varphi_i(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$$

che verifichi le condizioni

$$\eta_i(x_0) = h_i, \quad \eta_i(x_1) = k_i.$$

E — data la (5) — per dimostrare il teorema basterà far vedere che questa soluzione rappresenta una curva contenuta in I; cioè, che

$$(9)\qquad p_i(x) \leq \eta_i(x) \leq q_i(x) \qquad\qquad (x_0 \leq x \leq x_1),$$

disuguaglianze soddisfatte per ipotesi in x_0 e x_1.

Infatti, se in x' $(x_0 < x' < x_1)$ fosse $\eta_1(x') < p_1(x')$, detto x'' $(x_0 < x'' < x')$ il punto a sinistra di x' e ad x' più prossimo in cui $\eta_1(x) = p_1(x)$, nell'intervallo $x'' < x < x'$ dovrebbe esistere un punto ξ, tale che

$$\eta_1(\xi) < p_1(\xi), \quad \eta_1'(\xi) < p_1'(\xi)$$

e quindi — per le (6) e la prima delle (3) —

$$\eta_1''(\xi) \leq p_1''(\xi).$$

A destra di ξ sarebbe, almeno in un intorno,

$$p_1'(x) - \eta_1'(x) > 0, \quad p_1(x) - \eta_1(x) \geq p_1(\xi) - \eta_1(\xi) > 0;$$

e quindi

$$\eta_1''(x) \leq p_1''(x), \quad p_1'(x) - \eta_1'(x) \geq p_1'(\xi) - \eta_1'(\xi) > 0.$$

E si comprende facilmente che in queste condizioni la $\eta_1(x)$ non potrebbe mai rimontare la $p_1(x)$, in modo da aversi, in x_1,

$$\eta_1(x_1) = k_1 \geq p_1(x_1).$$

Dunque è

$$\eta_1(x) \geq p_1(x) \text{ (1)} \qquad (x_0 \leq x \leq x_1).$$

Allo stesso modo si dimostrano tutte le altre disuguaglianze contenute nelle (9).

3. Naturalmente — vedi il teorema ricordato nell' introduzione —:

Il teorema del n. 2 è sempre valido, se le (3) *e le* (4) *si sostituiscono rispettivamente con le*

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} p_1''(x) &\geq f_1(x, p_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \textit{per} \quad y_1' \geq p_1'(x), \\ q_1''(x) &\leq f_1(x, q_1(x), y_1', y_2, y_2'), \quad \textit{per} \quad y_1' \leq q_1'(x), \end{aligned}$$

se $a \leq x \leq b$, $p_2(x) \leq y_2 \leq q_2(x)$ *e* y_2' *qualunque, e con le*

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} p_2''(x) &\geq f_2(x, y_1, y_1', p_2(x), y_2'), \quad \textit{per} \quad y_2' \geq p_2'(x), \\ q_2''(x) &\leq f_2(x, y_1, y_1', q_2(x), y_2'), \quad \textit{per} \quad y_2' \leq q_2'(x), \end{aligned}$$

se $a \leq x \leq b$, $p_1(x) \leq y_1 \leq q_1(x)$ *e* y_1' *qualunque.*

Anche questo teorema si dimostra in modo analogo a quello tenuto nel n. 2.

Si introducono di nuovo le funzioni φ_1 e φ_2 mediante le (5), (6), (7), (8); si considera una coppia di integrali, $y_1 = \eta_1(x)$ e $y_2 = \eta_2(x)$, del sistema

$$y_i'' = \varphi_i$$

che soddisfaccia alle condizioni

$$\eta_i(x_0) = h_i, \quad \eta_i(x_1) = k_i$$

e si dimostra che anche in questo caso sono sempre soddisfatte le (9).

L' unica differenza consiste in ciò, che questa volta per stabilire le (9) bisognerà partire da x_1 e procedere verso sinistra, in conformità di quanto è stato fatto nel n. 4 della mia Nota citata.

Per esempio, ammettiamo che in un x' di $x_0 < x < x_1$ possa aversi

$$\eta_1(x') < p_1(x').$$

(1) Per il ragionamento svolto si vegga il n. 3 della mia Nota citata. Si noterà una lievissima modificazione (da introdursi anche nel luogo citato).

Se x'' è il primo punto a destra di x' in cui riesca $\eta_1(x) = p_1(x)$, nell'intervallo $x' < x < x''$ esiste uno ξ, tale da aversi

$$\eta_1(\xi) < p_1(\xi), \quad \eta_1'(\xi) > p_1'(\xi)$$

e quindi — per le (6) e la prima delle (10) —

$$\eta_1''(\xi) \leq p_1''(\xi);$$

e a sinistra di ξ sarà ancora

$$\eta_1'(x) - p_1'(x) > 0, \quad \eta_1(x) - p_1(x) \leq \eta_1(\xi) - p_1(\xi) < 0;$$

e quindi $\eta_1''(x) \leq p_1''(x)$, $\eta_1'(x) - p_1'(x) \geq \eta_1'(\xi) - p_1'(\xi) > 0$; ecc. (*).

(*) A proposito delle (3), (4), (10), (11) va ripetuta un'osservazione analoga a quella fatta nei riguardi delle (1), (2).