
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SALVATORE CHERUBINO

Sopra un teorema particolare e sui due fondamentali nella teoria delle matrici

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
I, Vol. 14 (1935), n.4, p. 230–234.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_230_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_230_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sopra un teorema particolare e sui due fondamentali nella teoria delle matrici.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Messina).

Sunto. - *Si ridimostra, indipendentemente dalle nozioni di segnatura e di forma canonica, un teorema dell' A , e si danno due nuove dimostrazioni dei teoremi del CAYLEY e del FROBENIUS, con applicazioni.*

In una recente Nota ⁽¹⁾ ho assegnato, fra l'altro, un teorema sull'aggiunta (ordinaria) di una matrice la cui dimostrazione si ottiene considerando la *segnatura* (SCORZA) della matrice ovvero la sua forma canonica.

Qui ne espongo una dimostrazione che è indipendente sia dalla forma canonica che dalla segnatura e tuttavia è sempre assai rapida. Il teorema riesce così più utile nelle applicazioni ⁽²⁾. Non solo, ma esso è tanto più deguo di essere osservato in quanto il procedimento dimostrativo che qui s'adopra, se opportunamente proseguito, dà luogo ai due celebri teoremi del CAYLEY e del FROBENIUS, fondamentali per la teoria delle matrici ⁽³⁾.

Ecco perchè mi son permesso scrivere queste brevi pagine.

⁽¹⁾ *Sul rango delle matrici pseudonulle* [questo « Bollettino », fasc. 3 del 1935-XIII].

⁽²⁾ Una di queste ha avuto occasione di esser fatta da un'allieva dell'Università di Messina, che cerca tutte le sostituzioni atte a ridurre a forma canonica le omografie di un S_n .

⁽³⁾ Di questi teoremi, e specie del primo, son note varie dimostrazioni. Credo che quella di questa Nota non manchi di eleganza, se non proprio di novità.

1. Sia A una matrice di ordine n e caratteristica $n-1$, A^* la sua aggiunta, che avrà necessariamente caratteristica uno.

Affinchè A^* sia pseudonulla occorre e basta ⁽⁴⁾ che le sue radici caratteristiche sian tutte nulle. Scriviamo perciò le equazioni caratteristiche di A e di A^* :

$$(1) \quad f(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots - \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n,$$

$$(2) \quad F(\lambda) = |A^* - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \Sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots - \Sigma_{n-1} \lambda + \Sigma_n.$$

Ricordando ⁽⁵⁾ i significati di σ_j e di Σ_j si ha

$$\sigma_n = 0, \quad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \dots = \Sigma_n = 0, \quad \sigma_{n-1} = \Sigma_1,$$

quindi $f(\lambda)$ ha almeno una radice nulla ed $F(\lambda)$ ne ha $n-1$. Affinchè $F(\lambda)$ abbia *tutte* le radici nulle occorre e basta avere $\Sigma_1 = \sigma_{n-1} = 0$, cioè che $f(\lambda)$ abbia una seconda radice nulla.

Indichiamo ora con $(A - \lambda I)^*$ l'aggiunta della matrice caratteristica $(A - \lambda I)$ di A e teniamo presente che si ha

$$(3) \quad (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I) = f(\lambda) \cdot I$$

essendo I la matrice identica di ordine n .

Derivando rispetto a λ si ottiene

$$(4) \quad -(A - \lambda I)^* = f'(\lambda) \cdot I - (A - \lambda I) \cdot \frac{d}{d\lambda} (A - \lambda I)^*$$

e moltiplicando, a sinistra, per $(A - \lambda I)^*$:

$$(5) \quad (A - \lambda I)^{**} = -f'(\lambda) \cdot (A - \lambda I)^* + f(\lambda) \cdot \frac{d}{d\lambda} (A - \lambda I)^*.$$

Se si tien conto che per $\lambda=0$ $(A - \lambda I)^*$ si riduce ad A^* , e che, come ora si è visto, affinchè A sia pseudonulla occorra e basta che $f(\lambda)$ ammetta almeno due radici nulle, supponendo ciò verificato e ponendo $\lambda=0$ nella (5), si ha senz'altro che $A^{**}=0$. Ciò si ha il teorema:

Se A è una matrice di ordine n e caratteristica $n-1$ la sua aggiunta A^ è pseudonulla allora e solo che A possenga (almeno) due radici caratteristiche nulle. Se ciò si verifica, il rango di A^* è eguale a due.*

2. Il metodo qui impiegato, opportunamente proseguito, può dar luogo al famoso teorema del CAYLEY.

⁽⁴⁾ SCORZA G., *Corpi numerici ed Algebre*. [Messina, Principato, 1921], pag. 158.

⁽⁵⁾ Ibidem, pag. 154.

ottenendo formole perfettamente analoghe alle (I), (6), (II), con la sola sostituzione di $(A - \lambda I)^*$ con $(A - \lambda I)^{**}$ e di n con n_1 . In definitiva, per $\lambda = 0$, si ottiene che

$$\varphi(A) = 0$$

quindi che $\varphi(\lambda)$ è divisibile per il primo membro $g(\lambda)$ dell'equazione minima di A .

Detto m il grado di $g(\lambda)$ si ha

$$g(A) = g[(A - \lambda I) + \lambda I] = \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} (A - \lambda I)^m + \\ + \frac{g^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} + \dots + g(\lambda) \cdot I = 0$$

che, moltiplicando per $(A - \lambda I)^{**}$ e tenendo presente la (9) ci dà

$$(10) \quad -g(\lambda) \cdot (A - \lambda I)^{**} = \varphi(\lambda) \left[\frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} (A - \lambda I)^{m-1} + \dots + \frac{g'(\lambda)}{1!} \cdot I \right].$$

Orbene, se fosse $\varphi(\lambda) = g(\lambda) \cdot \chi(\lambda)$, con $\chi(\lambda)$ polinomio di grado non nullo, dividendo la (10) per $g(\lambda)$ si avrebbe

$$(11) \quad -(A - \lambda I)^{**} = \chi(\lambda) \cdot \left[\frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} (A - \lambda I)^{m-1} + \dots + \frac{g'(\lambda)}{1!} I \right]$$

cioè gli elementi di $(A - \lambda I)^{**}$ ammetterebbero il fattore comune $\chi(\lambda)$, di grado non nullo, il che non può essere. Si ha dunque, tutt'al più a meno di un fattore costante, $g(\lambda) = \varphi(\lambda)$, cioè che l'equazione minima di A si ottiene dividendo $f(\lambda)$ per m. c. d. dei minori di ordine $n-1$ in $A - \lambda I$.

E questo è appunto il teorema del FROBENIUS.

4. Dalla (6) si deducono anche le seguenti osservazioni ^(*).

a) Supponiamo che A possieda una radice nulla di molteplicità $j+1$, sicchè

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(j)}(0) = 0, \quad f^{(j+1)}(0) \neq 0.$$

Prendendo $\lambda = 0$ nella (6) questa ci dà

$$(12) \quad A^* = X \cdot A^j = A^j \cdot X$$

ove

$$(13) \quad -X = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^{n-j-1} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} A^{n-j-2} + \dots + \frac{f^{(j+1)}(0)}{(j+1)!}$$

è una matrice non necessariamente nulla.

(*) Anch'esse utilizzate allo scopo di cui alla nota ⁽²⁾.

Le (12) equivalgono ⁽⁷⁾ ad affermare che le due matrici

$$(14) \quad (A^j | A^*), \quad \left(\frac{A^j}{A^*} \right)$$

hanno la stessa caratteristica di A^j , cioè che le (12) stesse, considerate come equazioni in X , sono risolubili.

b) Indicando con $(A^s)^*$ l'aggiunta di A^s e prendendo $s \leq j$, si ha

$$A^j \cdot (A^s)^* = (A^s)^* \cdot A^j = |A^s| \cdot A^{j-s}, \quad s = 1, 2, \dots, j$$

ove s'intende che $A^0 = I$.

Nella stessa ipotesi dell'osservazione precedente, se si moltiplicano le (12), a destra o a sinistra, per $(A^s)^*$, si ha

$$(15) \quad A^* \cdot (A^s)^* = (A^s)^* \cdot A^* = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, j)$$

cioè che le matrici A^* ed $(A^s)^*$ sono mutuamente nullifici.

Di qui, per $s=1$, $j \geq 1$, si ottiene ancora il teorema del n. 1.

c) Alla (6) si può pervenire in senso inverso a quello impiegato nel n. 2, cioè partendo da $f(A) = 0$. Basta porre $A = (A - \lambda I) + \lambda I$, applicare lo sviluppo del TAYLOR e poi dividere per $A - \lambda I$, che, essendo λ un'indeterminata, è certo matrice non degenera.

Con ciò, tutte le osservazioni ora fatte, ed anche quella del n. 1 e le formole (I), appaiono conseguenze del teorema del CAYLEY.

Però, gli sviluppi precedenti ne mostrano l'indipendenza da questa proposizione nonchè l'indipendenza dalla nozione di segnatura e dalla forma canonica di A .

⁽⁷⁾ CECIONI F., *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici*. [*Annali di Pisa*], vol. XI (1909), p. 12.