Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Sulla somma delle potenze dello stesso grado dei primi n numeri interi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 234–236.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_234_0>

Sulla somma delle potenze dello stesso grado dei primi n numeri interi.

Nota di Letterio Toscano (a Messina).

Sunto. - *A proposito delle formule sulla somma delle potenze di egual grado dei primi* n *numeri interi in funzione di quella delle loro prime potenze. studiate dal* Ducci, *si ricorda che esse son dovute a* Jacobi *e* Prouhet, *e si fanno opportuni confronti.*

1. Nel fasc. 2 del presente volume di questo « Bollettino » il Ducci si occupa della somma delle potenze di egual grado dei primi n numeri interi in funzione di quella delle loro prime potenze, e stabilisce le due formule

(1) $$s_{2r} = s_2[p_1^{(r)} s_1^{r-1} + p_2^{(r)} s_1^{r-2} + \dots + p_r^{(r)}],$$

(2) $$s_{2r+1} = s_1^2[q_1^{(r)} s_1^{r-1} + q_2^{(r)} s_1^{r-2} + \dots + q_r^{(r)}],$$

dando per il calcolo dei coefficienti $p_i^{(r)}$, $q_i^{(r)}$ un metodo ricorrente. Alle formule precedenti il DUCCI aveva pensato sin dal 1892 (¹), ma esse, come si rileva a pag. 301 del *Traité Élémentaire des nombres de Bernoulli* di N. NIELSEN (Paris, Gauthier-Villars, 1923), son dovute rispettivamente a JACOBI (²) e PROUHET (³).

E i coefficienti $p_i^{(r)}$, $q_i^{(r)}$ risultano dati in funzione di r dalle relazioni

(3) $$p_{i+1}^{(r)} = 3 \cdot 2^{r-2i-1} \frac{r-i+1}{(2r+1)(r+1)} \alpha_{r,i}$$

(4) $$q_{i+1}^{(r)} = \frac{2^{r-2i}}{r+1} \alpha_{r,i}$$

con

$$\alpha_{r,0} = 1,$$

(5) $$\alpha_{r,i} = \binom{r+1}{i} + \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^k \binom{r-k+1}{i-k} \binom{2r+2}{2k} (2^{2k}-2) B_k,$$

essendo

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \dots$$

numeri di BERNOULLI.

Dalle (3) e (4) si ricava subito

(6) $$p_1^{(r)} = \frac{3 \cdot 2^{r-1}}{2r+1}, \quad q_1^{(r)} = \frac{2^r}{r+1}, \quad q_{i+1}^{(r)} = \frac{2}{3}(2r+1) \frac{p_{i+1}^{(r)}}{r-i+1}.$$

Dall' ultima delle precedenti si ha

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} \frac{p_{i+1}^{(r)}}{r-i+1} = \frac{3}{2(2r+1)} \sum_{i=0}^{i=r-1} q_{i+1}^{(r)}$$

e per la proprietà evidente

$$p_1^{(r)} + p_2^{(r)} + \dots + p_r^{(r)} = q_1^{(r)} + q_2^{(r)} + \dots + q_r^{(r)} = 1$$

risulta

(7) $$\sum_{i=0}^{i=r-1} \frac{p_{i+1}^{(r)}}{r-i+1} = \frac{3}{2(2r+1)}.$$

(¹) *Sulla somma delle potenze di egual grado dei termini di una progressione per differenza.* (R. Tip. Editrice Salentina, Lecce, 1892; oppure « Giornale di Matematiche », vol. XXXII, 1894).

(²) « Journal de Crelle », t. 12, 1834.

(³) « Nouvelles Annales », t. 10, 1851.

Nella Nota del DUCCI si trovano altre eleganti relazioni sui coefficienti $p_i^{(r)}$, $q_i^{(r)}$, dedotte con procedimento che non ha punti di riferimento con quelli riportati dal NIELSEN, e, di più, per confronto si possono stabilire relazioni sui numeri di BERNOULLI.

Così dalla (7) si ha

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} 2^{r-3i}\alpha_{r,i} = r+1,$$

e per la (5)

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} 2^{r-3i}\binom{r+1}{i} + \sum_{i=0}^{i=r-1}\sum_{k=1}^{k=i}(-1)^k\binom{r-k+1}{i-k}\binom{2r+2}{2k}(2^{2k}-2)B_k = r+1;$$

ma

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} 2^{r-3i}\binom{r+1}{i} = \frac{9^{r+1}-8r-9}{2^{2r+3}},$$

e quindi si conclude

$$\sum_{i=0}^{i=r-1}\sum_{k=1}^{k=i}(-1)^k\binom{r-k+1}{i-k}\binom{2r+2}{2k}(2^{2k}-2)B_k = r+1-\frac{9^{r+1}-8r-9}{2^{2r+3}}. \tag{8}$$

2. Per le somme alternate

$$\sigma_m = n^m - (n-1)^m + (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot 1^m$$

valgono le formule [1]

$$\sigma_{2r} = n(n+1)\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{\beta_{r,i}}{2^{2i+1}}(n^2+n)^{r-i+1} \tag{9}$$

$$\sigma_{2r+1} = \frac{n+\frac{1}{2}}{2r+2}\sum_{i=0}^{i=r}\frac{(2r-2i+2)\beta_{r+1,i}}{2^{2i+1}}(n^2+n)^{r-i} + \frac{(-1)^{r+n}T_{r+1}}{2^{2r+2}}, \tag{10}$$

con

$$\beta_{r,0} = 1,$$

$$\beta_{r,i} = \binom{r}{i} + \sum_{k=1}^{k=i}(-1)^k\binom{r-k}{i-k}\binom{2r}{2k}E_k, \tag{11}$$

essendo

$E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$,... numeri di EULERO,

$T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$,... coefficiente delle tangenti;

ed anche in questo caso si potrebbe séguire il procedimento del DUCCI per lo studio dei coefficienti dello sviluppo di σ_{2r} e σ_{2r+1} con polinomi secondo le potenze di s_1.

[1] NIELSEN, op. cit., pag. 300.