BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del 2° ordine

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.4, p. 237–243.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_237_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_237_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del 2° ordine.

Nota di E. BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Dati due elementi superficiali del 2° ordine in S_3 tali che il centro di ciascuno di essi appartenga al piano tangente all'altro si costruisce per via geometrica un sistema completo d'invarianti proiettivi dipendenti dai due elementi e da punti rette e piani.*

1. Posizione del problema. — Siano dati due elementi superficiali di 2° ordine σ , σ^* di centri distinti A e A^* , di piani tangenti distinti π e π^* secantisi lungo AA^* .

È ovvio introdurre le tangenti t e t^* coniugate di AA^* rispetto alle tangenti asintotiche uscenti rispettivamente da A e da A^* (le tangenti asintotiche di ogni coppia si suppongono distinte).

Con opportuno riferimento proiettivo può darsi agli elementi indicati la seguente rappresentazione analitica:

$$A(0, 0, 0, 1); \quad A^*(0, 1, 0, 0); \quad \pi(x_3 = 0); \quad \pi^*(x_1 = 0);$$

$$t(x_2 = x_3 = 0); \quad t^*(x_1 = x_4 = 0);$$

$$(1) \quad \sigma \quad \frac{x_3}{x_4} = l_{11} \left(\frac{x_1}{x_4} \right)^2 + l_{22} \left(\frac{x_2}{x_4} \right)^2,$$

$$(2) \quad \sigma^* \quad \frac{x_1}{x_2} = l_{33} \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 + l_{44} \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^2.$$

Un cambiamento del sistema di riferimento che non alteri le posizioni fatte per A , A^* , t , t^* è necessariamente del tipo:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 \\ x_2' &= a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{33}x_3 \\ x_4' &= a_{41}x_1 + a_{44}x_4; \end{aligned}$$

nel nuovo sistema σ e σ^* si rappresentano con equazioni analoghe ad (1) e (2) ove alle l_{hk} si sostituiscono le l_{hk}' date da

$$(4) \quad \begin{aligned} a_{33}a_{44}l_{11} &= a_{11}^2l_{11}', & a_{33}a_{44}l_{22} &= a_{22}^2l_{22}', \\ a_{11}a_{22}l_{33} &= a_{33}^2l_{33}', & a_{11}a_{22}l_{44} &= a_{44}^2l_{44}'. \end{aligned}$$

Il dott. P. BUZANO ha rilevato ⁽¹⁾ dalle formole precedenti che

$$(5) \quad I = l_{11}l_{22}l_{33}l_{44}$$

(1) Nella Nota: *Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie.* « Bollett. Unione Matem. Ital. », a. XIV, n. 2 (1935).

è un *invariante proiettivo* di σ e σ^* (coincidente con uno dato dal WAELSCH per una congruenza di rette di cui AA^* sia un raggio e σ e σ^* appartengano alle superficie focali); e ne ha dato un significato metrico (in funzione delle curvature gaussiane di σ e σ^* , della distanza, supposta finita, AA^* e dell'angolo $\widehat{\pi\pi^*}$).

Attesa la natura dell'invariante, un significato proiettivo di esso sembra desiderabile: e se ne hanno diversi non meno semplici di quello metrico.

Questa ricerca era il primo proposito della Nota: ma mi è parso opportuno esaurire lo studio degli elementi σ e σ^* aggiungendo la determinazione di proiettività, correlazioni, punti e rette invarianti determinati da σ e σ^* e inoltre di un sistema completo d'invarianti relativo alla coppia σ e σ^* e a punti, rette e piani (cioè dipendenti non solo dalle l_{hk} , ma anche dalle x_i). Tutti questi invarianti sono ottenuti per via geometrica: la verifica analitica dell'invarianza, per mezzo delle (3) è lasciata al lettore.

2. Significato proiettivo dell'invariante I . — Indico con μ un piano per AA^* (di equazione $x_3 = \mu x_1$) e con M un punto di AA^* (di coordinate $0, \xi_2, 0, \xi_4$).

Una quadrica che abbia per generatrici t, AA^*, t^* e tocchi in M il piano μ ha un'equazione del tipo (con λ arbitrario):

$$x_3x_4 = \mu \frac{\xi_4}{\xi_2} x_1x_2 + \lambda x_1x_3;$$

le tangenti alla sua curva d'intersezione con σ (in A) coincidono quando

$$(6) \quad \mu^2 \left(\frac{\xi_4}{\xi_2} \right)^2 = 4l_{11}l_{22}.$$

Questa equazione rappresenta una proiettività fra le coppie di punti dividerti armonicamente A e A^* e le coppie di piani dividenti armonicamente π e π^* . Sicchè:

Le quadriche aventi per generatrici AA^, t, t^* e che producono su σ una sezione cuspidata determinano una proiettività fra le coppie dell'involuzione che ha per punti doppi A e A^* e le coppie dell'involuzione che ha per piani doppi π e π^* : ad un punto M (e al suo coniugato) corrispondono i piani ivi tangenti alle quadriche dette.*

È questa una prima proiettività invariante determinata da σ e σ^* ; una seconda se ne ha scambiando σ con σ^* . Se ad una coppia di punti coniugati rispetto ad A e ad A^* si fanno corrispondere le due coppie di piani determinate dalle due proiettività si ha una proiettività fra le coppie dell'involuzione di piani.

L'invariante assoluto di questa proiettività vale 16I e quindi fornisce il significato geometrico cercato.

3. Omografie che scambiano i due elementi superficiali. Piani e punti invarianti. — Si considerino le proiettività (omografie) che mutano $A(A^*)$ in $A^*(A)$, $t(t^*)$ in $t^*(t)$. Una di esse ha equazioni del tipo

$$(7) \quad \begin{aligned} y_1 &= b_{13}x_3 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{24}x_4 \\ y_3 &= b_{31}x_1 \\ y_4 &= b_{42}x_2 + b_{43}x_3 \end{aligned}$$

e muta σ nell'elemento di centro A^*

$$\frac{y_1}{y_2} = b_{13}b_{24} \left(\frac{l_{11}}{b_{31}^2} y_3^2 + \frac{l_{22}}{b_{42}^2} y_4^2 \right).$$

Affinchè questo coincida con σ^* , e analogamente affinchè il trasformato di σ^* mediante (7) coincida con σ , dev'essere

$$\frac{b_{13}b_{24}}{b_{31}^2} = \frac{l_{22}}{l_{11}}, \quad \frac{b_{13}b_{24}}{b_{42}^2} = \frac{l_{44}}{l_{22}}, \quad \frac{b_{31}b_{42}}{b_{13}^2} = \frac{l_{11}}{l_{33}}, \quad \frac{b_{31}b_{42}}{b_{24}^2} = \frac{l_{22}}{l_{44}},$$

Posto $b_{13}b_{24} = k^2$ si ricava

$$(8) \quad b_{31}^2 = k^2 \frac{l_{11}}{l_{33}}, \quad b_{42}^2 = k^2 \frac{l_{22}}{l_{44}}, \quad b_{13}^4 = k^4 \frac{l_{22}l_{33}}{l_{44}l_{11}}, \quad b_{24}^4 = k^4 \frac{l_{44}l_{11}}{l_{22}l_{33}}.$$

Le proiettività (7) soddisfacenti alle (8) con k , b_{21} , b_{34} arbitrarie (può farsi $k=1$ perchè è $\neq 0$) sono le ∞^2 proiettività che scambiano fra loro σ e σ^* .

La retta AA^* è unita in questa proiettività; i piani uniti e i punti ad essa appartenenti sono dati da

$$(9) \quad \mu^2 = \sqrt[4]{\frac{l_{11}^3 l_{44}}{l_{33}^3 l_{22}}}$$

$$(10) \quad x_1 = x_3 = 0, \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}^2 = \sqrt[4]{\frac{l_{33} l_{22}^3}{l_{11} l_{44}^3}}.$$

Questi piani e questi punti sono invarianti proiettivi di σ e σ^* .

4. Correlazioni nulle determinate dai due elementi superficiali. — Le due coppie di tangenti asintotiche di σ e σ^* determinano per ogni punto $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ dello spazio due piani: ciascuno contiene una coppia di rette incidenti complessivamente le

quattro tangenti asintotiche. Per ottenere questi piani basta proiettare le tangenti asintotiche di σ^* su π ed osservare che le tracce dei piani cercati su π costituiscono l'ulteriore conica degenera del fascio individuato dalle tangenti asintotiche di σ e dalle proiezioni di quelle di σ^* . I piani proiettanti da P queste ultime sono dati da

$$(11) \quad l_{33}(\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3)^2 + l_{44}(\xi_4 x_1 - \xi_1 x_4)^2 = 0$$

o le loro tracce su $x_3 = 0$ da

$$(l_{33}\xi_3^2 + l_{44}\xi_4^2)x_1^2 - 2l_{44}\xi_1\xi_4 x_1 x_4 + l_{44}\xi_1^2 x_4^2 = 0.$$

Determinata l'ulteriore conica degenera del fascio individuato da questa coppia di rette e dall'altra $l_{11}x_1^2 + l_{22}x_2^2 = 0$ (su $x_3 = 0$) si trova per i piani cercati l'equazione

$$(12) \quad \xi_4 x_1 - \xi_1 x_4 + L(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3) = 0$$

ove

$$(13) \quad L = \pm \sqrt{l_{22}l_{33}/l_{11}l_{44}}.$$

Sicchè al punto P viene associato il piano (per una determinazione di L) di coordinate

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_4 \\ \alpha_2 &= L\xi_3 \\ \alpha_3 &= -L\xi_2 \\ \alpha_4 &= -\xi_1. \end{aligned}$$

Queste sono le equazioni di una correlazione nulla (per ciascuna determinazione di L) determinata in modo invariante da σ e da σ^* (1).

5. Invarianti di un piano o di un punto appartenenti alla retta dei centri. — Si considerino le quadriche possedenti σ o σ^* e tangenti in P ad un piano dato: esse hanno in P generatrici distinte (per le due quadriche in esame) a meno che il piano sia uno di quelli associati dalle correlazioni nulle precedenti a P .

Una quadrica avente per generatrici in A le tangenti asintotiche di σ e tangente in P al piano (12) appartiene al fascio

$$\lambda x_3[(\xi_4 x_1 - \xi_1 x_4) + L(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3)] + l_{11}(\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3)^2 + l_{22}(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3)^2 = 0;$$

quella possedente in A l'elemento σ ha l'equazione

$$(15) \quad \begin{aligned} &\xi_3^2 x_3[(\xi_4 x_1 - \xi_1 x_4) + L(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3)] + \\ &+ \xi_1[l_{11}(\xi_3 x_1 - \xi_1 x_3)^2 + l_{22}(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3)^2] = 0. \end{aligned}$$

(1) I due piani che le correlazioni fanno corrispondere a P si tagliano nella retta per P incidente t e t^* .

Analogamente la quadrica possedente in A^* l'elemento σ^* e tangente in P allo stesso piano ha l'equazione

$$(16) \quad \begin{aligned} & \xi_1^2 x_1 [(\xi_4 x_1 - \xi_1 x_4) + L(\xi_3 x_2 - \xi_2 x_3)] - \\ & - L\xi_3 [l_{33}(\xi_2 x_1 - \xi_1 x_3)^2 + l_{44}(\xi_4 x_1 - \xi_1 x_4)^2] = 0. \end{aligned}$$

Due quadriche aventi in un punto le stesse generatrici, e più in generale due superficie aventi in un punto le stesse tangenti asintotiche, hanno un invariante proiettivo di contatto ⁽¹⁾; esso si calcola nel modo più semplice prendendo l'origine di un nuovo sistema di riferimento nel punto (p. es. posto $\xi_4 = x_4 = 1$, con la trasformazione $X = x_1 - \xi_1$, $Y = \xi_3 x_1 - \xi_1 x_3$, $Z = \xi_3 x_2 - \xi_2 x_3$) e facendo il rapporto dei termini di 2° grado. Si trova così per questo invariante

$$(17) \quad - \left(\frac{\xi_3}{\xi_1} \right)^4 \sqrt{\frac{l_{22} l_{33}^3}{l_{44} l_{11}^3}} = - \mu^4 \sqrt{\frac{l_{22} l_{33}^3}{l_{44} l_{11}^3}}.$$

Questo invariante non dipende proprio da P (che è servito a costruirlo) ma dal piano $\mu \equiv AA^*P$. Si ha dunque *un invariante dipendente da σ , σ^* e da un piano μ per i loro centri; per i piani invarianti già trovati questo invariante è in modulo = 1. Esso è l'invariante di contatto di due quadriche possedenti σ e σ^* ed aventi in un punto qualsiasi del piano μ le stesse generatrici.*

Se si passa mediante una delle correlazioni (14) dal piano μ al punto $M(0, x_2, 0, x_4)$ su AA^* si ha da (17) l'invariante

$$(18) \quad - \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^4 \sqrt{\frac{l_{11} l_{44}^3}{l_{33} l_{22}^3}}, \quad x_1 = x_3 = 0;$$

invariante relativo a σ , σ^ e ad un punto M di AA^* . Esso è in modulo = 1 per i punti invarianti già trovati.*

Se invece si fosse applicata a (17) la proiettività (6) si sarebbe ottenuto in luogo di (18) l'invariante stesso diviso per $16I$; e quindi un nuovo modo di ricavare I .

6. Invarianti di una tangente ad un elemento superficiale. Nuovo significato di I . — Indico con a una tangente generica in A a σ , di equazioni $x_3 = x_2 - ax_1 = 0$; analogamente con a^* una

(1) E. BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario* « Atti R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. LIX (1924), § 4, (7). Con una sezione piana per il punto ci si riduce all'invariante di cui alla nota seguente.

tangente in A^* a σ^* . Una tangente a ha un invariante evidente: il suo birapporto con una tangente asintotica in A , con AA^* e con t ; per avere un invariante razionale conviene considerare la coppia di a e della sua coniugata a' rispetto ad AA^* e t , la coppia delle tangenti asintotiche e le due rette doppie AA^* e t . Il birapporto di queste 4 coppie vale

$$(10) \quad -a^2 \frac{l_{22}}{l_{11}}.$$

Un altro invariante, che non interessa solo σ e la retta AA^* ma tutt'e due gli elementi superficiali ed a , può ottenersi così.

Una quadrica qualsiasi avente per generatrici a ed AA^* ha in A un elemento di 2° ordine

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{\lambda} \left[-a \left(\frac{x_1}{x_4} \right)^2 + \frac{x_1 x_2}{x_4^2} \right].$$

Un qualsiasi piano per $t(x_2 = kx_3)$ taglia questo elemento superficiale e σ in due elementi curvilinei del 2° ordine aventi per invariante di contatto (1)

$$(20) \quad -\frac{l_{11}\lambda}{a}.$$

Se la quadrica considerata ha per ulteriore generatrice t^* e se produce su σ^* una sezione cuspidata dev'essere $\lambda^2 = 4l_{33}l_{44}$.

Il quadrato dell'invariante (20) vale in tal caso

$$(21) \quad 4 \frac{l_{11}^2 l_{33} l_{44}}{a^2} = 4 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 l_{11}^2 l_{33} l_{44} \quad (x_3 = 0).$$

È questo un nuovo invariante della coppia di tangenti a e a' coniugate rispetto ad AA^ e a t .*

Il prodotto dei due invarianti relativi ad una di queste coppie (o anche il secondo invariante calcolato per la coppia di tangenti asintotiche) vale $-4I$; si ha qui un nuovo significato proiettivo di I .

7. Invarianti di una coppia di tangenti ai due elementi superficiali. — Si considerino infine una tangente $a(x_3 = ax_1, -x_2 = 0)$ e una tangente $a^*(x_1 = a^*x_3 - x_4 = 0)$.

Una quadrica avente per generatrici a , AA^* , a^* ha un'equa-

(1) Due elementi curvilinei di 2° ordine uscenti da un punto con la stessa tangente hanno un invariante proiettivo di cui C. SEGRE ha dato un significato come limite di un birapporto.

zione del tipo (con b e λ arbitrari)

$$\frac{1}{\lambda} (ax_1^2 - x_1x_2) + (x_3x_4 - a^*x_3^2) + bx_1x_3 = 0.$$

Essa produce su σ^* una sezione cuspidata quando sia

$$\lambda^2 - 4a^*l_{44}\lambda - 4l_{33}l_{44} = 0.$$

Si hanno quindi due fasci di quadriche soddisfacenti alle condizioni volute e l'invariante (20) conserva lo stesso valore per tutte le quadriche di un fascio. Allora:

La somma degli invarianti di contatto (20) relativi ai due fasci di quadriche aventi per generatrici a , AA^ , a^* e producenti su σ^* una sezione cuspidata è l'invariante*

$$4 \frac{a^*}{a} l_{11} l_{44}.$$

Scambiando nella costruzione σ^* con σ si ha l'altro invariante relativo alle stesse tangenti

$$4 \frac{a}{a^*} l_{33} l_{22}.$$

Il loro prodotto vale $16I$ e ne dà un nuovo significato.

8. Completezza del sistema di invarianti trovato. — Il sistema di invarianti trovati è completo (anzi sovrabbondante) nel senso che ogni invariante di σ , σ^* e di punti, rette e piani è funzione di essi (anzi di alcuni che verranno ora precisati).

Invariante dei due soli elementi σ e σ^* non c'è che I . Quando si aggiunga a σ e σ^* un punto, siccome nelle formole di trasformazione (4) delle l_{hk} non compariscono i coefficienti a_{22} , a_{41} delle (3) non potranno comparire nelle espressioni di invarianti che x_1/x_2 , x_2/x_4 per $x_1 = x_2 = 0$, x_1/x_3 per $x_3 = 0$, x_3/x_4 per $x_1 = 0$. Ora ciò equivale a studiare gli invarianti di (σ e σ^* e di) un piano μ per AA^* , di un punto M su AA^* , di una tangente a o a^* ; ed è ben evidente che per ciascuno di questi elementi non c'è che un invariante essenziale. Sicchè degli invarianti trovati basterà ritenere, oltre I , l'invariante (17) per μ e la correlazione (14) che fornisce l'invariante (18) per M ; l'invariante (19) per a (e l'analogo per a^* oppure le proiettività invarianti (7) (8) che scambiano σ e σ^*).

Se alla coppia σ , σ^* si associa un piano si passa al caso precedente con la correlazione (14); e allo stesso caso si ritorna per una retta individuandola con le sue tracce su π , π^* . E con ciò è provato l'asserto.