BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIULIO VIVANTI

Un'osservazione sui funzionali che ammettono un teorema d'addizione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 244–246.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_244_0>

Un' osservazione sui funzionali che ammettono un teorema d' addizione.

Nota di G. VIVANTI (a Milano).

Sunto. - *Una condizione necessaria per la funzione che figura nella formola d' addizione.*

Il prof. L. FANTAPPIÈ (*I funzionali analitici*, « Mem. R. Acc. dei Lincei », S. VI, T. 3, § 94) chiama *funzionali che ammettono un teorema d' addizione* i funzionali $F[u(t)]$ tali che:

$$F[u(t)+v(t)]=\psi\{F[u(t)],\ F[v(t)]\}, \tag{1}$$

e dimostra che, affinchè la relazione (1) abbia luogo, è necessario e sufficiente che sia:

$$F[u(t)]=f\{L[u(t)]\},$$

dove $L[u(t)]$ è un funzionale *lineare*, e f una funzione ordinaria. Posto:

$$L[u(t)]=\xi,\quad L[v(t)=\eta,$$

risulta, per la linearità di L:

$$F[u(t)]=f(\xi),\quad F[v(t)]=f(\eta),\quad F[u(t)+v(t)]=f(\xi+\eta),$$

e la (1) diviene:

$$f(\xi+\eta)=\psi\,[f(\xi),\quad f(\eta)],$$

od anche, indicando con φ la funzione inversa di f:

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi[\psi(x,\,y)], \tag{2}$$

dove:

$$x=f(\xi),\quad y=f(\eta).$$

Data f, e quindi φ, la ψ è determinata dalla relazione:

$$\psi(x,\,y)=\varphi^{-1}\{\varphi(x)+\varphi(y)\}.$$

Si può chiedersi viceversa come possa determinarsi φ conoscendo ψ. Per questa questione ci poniamo nel campo reale.

Derivando la (2) rispetto ad x e poi ad y, si ottiene:

$$\varphi''(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\varphi'(\psi)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,$$

da cui:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}:\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\varphi''(\psi)}{\varphi'(\psi)}.$$

Di qui risulta anzitutto, che la funzione ψ deve essere tale, che l'espressione al primo membro sia eguale ad una funzione di ψ stessa. Scriviamo:

(3) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \theta(\psi),$$

od anche, ponendo z in luogo di f ed adoperando le notazioni usuali:

(4) $$s - pq\theta(z) = 0.$$

Coll'applicazione dei metodi classici a quest'equazione, si trova l'integrale generale:

$$\int e^{-\int\theta(z)dz} dz = \alpha(x) + \beta(y),$$

dove $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ sono funzioni arbitrarie.

Rimettendo per $\theta(z)$ la sua espressione $-\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$, la precedente diviene:

$$\varphi(z) = \alpha(x) + \beta(y).$$

La (2), cioè:

$$\varphi(z) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

è un integrale particolare della (4).

La condizione (3) è dunque necessaria ma non sufficiente perchè possa sussistere la (2), ciò che del resto è evidente, se si consideri che la ψ. oltre a soddisfare alla (3), deve necessariamente essere una funzione simmetrica di x, y.

Può concludersi pertanto che: se la ψ non soddisfa alla (3), non esiste alcuna funzione φ che renda soddisfatta la (2); nel caso contrario, la sola *possibile* soluzione è:

$$\varphi(z) = \int e^{-\int\theta(z)dz} dz.$$

Si prenda per es. $\psi(x, y) = xy$; risulta:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{\psi}, \quad \theta(z) = \frac{1}{z},$$

$$\varphi(z) = \int e^{-\int\theta(z)dz} dz = \lg z,$$

ed è:

$$\lg z = \lg(xy) = \lg x + \lg y.$$

Si prenda invece $\psi(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$; risulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos^2(x+y)} = - \frac{\psi}{1 - \psi^2},$$

$$\theta(z) = - \frac{z}{1 - z^2}, \quad \varphi(z) = \operatorname{arcsen} z = x + y;$$

la (2) non è soddisfatta.