
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

NIKOLA OBRECHKOFF

Sui polinomi univalenti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.4, p. 246–247.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_246_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_246_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sui polinomi univalenti.

Nota di N. OBRECHKOFF (Sofia - Bulgaria).

In questa Nota noi dimostriamo con metodo elementare qualche teorema nuovo per i polinomi univalenti.

I. Sia

$$(1) \quad f(z) = z + a_1 z^{q+1} + a_2 z^{2q+1} + \dots + a_n z^{nq+1}$$

un polinomio arbitrario e sia z_0 lo zero di $\frac{f(z)}{z}$ che è il più vicino all'origine. Il polinomio $f(z)$ è univalente nel circolo

$$(2) \quad |z| \leq |z_0| \sqrt[q]{\frac{1}{qn+1}}$$

e lo rappresenta entro un dominio stellato per rapporto all'origine.

Infatti, si ha:

$$(3) \quad \begin{aligned} f(z) &= a_n z(z^q - \alpha_1) \dots (z^q - \alpha_n), \quad z = re^{i\theta}, \\ \Phi = \arg f(z) &= \theta + \arg a_n + \sum_{p=1}^n \arg(z^q - \alpha_p). \end{aligned}$$

Noi studieremo la variazione di Φ quando θ varia da 0 a 2π . Poniamo

$$z^q = \alpha_k u, \quad u = \rho e^{i\varphi}, \quad \psi = \arg(u - 1);$$

se ne ricava facilmente

$$\begin{aligned} \varphi &= q\theta - \arg a_k, \quad d\varphi = qd\theta, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi - 1}, \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\rho^2 - \rho \cos \varphi}{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1}, \end{aligned}$$

donde, per $\rho < 1$,

$$-\frac{\rho}{1-\rho} \leq \frac{d\psi}{d\varphi} \leq \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Dunque per $r^q < r_k$ si avrà

$$(4) \quad -\frac{qr^q}{r_k - r^q} \leq \frac{d\psi}{d\theta} \leq \frac{qr^q}{r_k + r^q}.$$

Dalla (3) e (4) si ottiene

$$(5) \quad \frac{d\Phi}{d\theta} \geq 1 - \sum_{k=1}^n \frac{qr^q}{r_k - r^q}.$$

Dalle condizioni del teorema segue

$$r_k \geq |z_0| = a.$$

Dunque dalla (5) si ha

$$\frac{d\Phi}{d\theta} \geq 1 - \frac{nr^q q}{a^q - r^q} > 0$$

per $r < \frac{a}{\sqrt[q]{qn+1}} = \mu$. Dunque Φ è una funzione crescente di θ

per $r < \mu$. Sia γ un numero arbitrario, ma $|\gamma| < \mu$. Allora l'argomento di $f(z) - f(\gamma)$ cresce da 0 sino a 2π , quando θ cresce da 0 a 2π , e questo dimostra che l'equazione

$$f(z) - f(\gamma) = 0$$

ha solamente un zero $z = \gamma$ nel circolo $|z| < \mu$. Il teorema è così dimostrato.

Il limite μ è raggiunto per i polinomi

$$z(z^q - z_0^q)^n.$$

Nel caso particolare $q=1$ si ottiene un teorema di ALEXANDER⁽¹⁾.

Con lo stesso metodo si può dimostrare il teorema seguente:

II. Sia z_0 lo zero del polinomio

$$(6) \quad \frac{f(z)}{z^p} = 1 + a_1 z^q + a_2 z^{2q} + \dots + a_n z^{nq}$$

più vicino all'origine. Il polinomio $f(z)$ è p -valente nel circolo

$$(7) \quad |z| \leq |z_0| \sqrt[q]{\frac{p}{qn+p}}.$$

Il limite (7) è raggiunto per i polinomi

$$z^p(z^q - z_0^q)^n.$$

Con lo stesso metodo si possono dimostrare dei teoremi ancora più generali.

(1) P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, 1933.