Nikola Obrechkoff

Sui polinomi univalenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 246–247.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_246_0>

Sui polinomi univalenti.

Nota di N. Obrechkoff (Sofia - Bulgaria).

In questa Nota noi dimostriamo con metodo elementare qualche teorema nuovo per i polinomi univalenti.

I. *Sia*

$$f(z) = z + a_1 z^{q+1} + a_2 z^{2q+1} + \dots + a_n z^{nq+1} \tag{1}$$

un polinomio arbitrario e sia z_0 *lo zero di* $\frac{f(z)}{z}$ *che è il più vicino all'origine. Il polinomio* $f(z)$ *è univalente nel circolo*

$$|z| \leqq |z_0| \sqrt[q]{\frac{1}{qn+1}} \tag{2}$$

e lo rappresenta entro un dominio stellato per rapporto all'origine.

Infatti, si ha:

$$f(z) = a_n z(z^q - \alpha_1) \dots (z^q - \alpha_n), \quad z = re^{i\theta},$$

$$\Phi = \arg f(z) = \theta + \arg a_n + \sum_{p=1}^{n} \arg (z^q - \alpha_p). \tag{3}$$

Noi studieremo la variazione di Φ quando θ varia da 0 a 2π. Poniamo

$$z^q = \alpha_k u, \quad u = \rho e^{i\varphi}, \quad \psi = \arg (u - 1);$$

se ne ricava facilmente

$$\varphi = q\theta - \arg a_k, \quad d\varphi = qd\theta,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi - 1}, \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\rho^2 - \rho \cos \varphi}{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1},$$

donde. per $\rho < 1$,

$$-\frac{\rho}{1-\rho} \leqq \frac{d\psi}{d\varphi} \leqq \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Dunque per $r^q < r_k$ si avrà

$$(4) \qquad -\frac{qr^q}{r_k - r^q} \leqq \frac{d\psi}{d\theta} \leqq \frac{qr^q}{r_k + r^q}.$$

Dalla (3) e (4) si ottiene

$$(5) \qquad \frac{d\Phi}{d\theta} \geqq 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{qr^q}{r_k - r^q}.$$

Dalle condizioni del teorema segue

$$r_k \geqq |z_0| = a.$$

Dunque dalla (5) si ha

$$\frac{d\Phi}{d\theta} \geqq 1 - \frac{nr^q q}{a^q - r^q} > 0$$

per $r < \frac{a}{\sqrt[q]{qn+1}} = \mu$. Dunque Φ è una funzione crescente di θ per $r < \mu$. Sia γ un numero arbitrario, ma $|\gamma| < \mu$. Allora l'argomento di $f(z) - f(\gamma)$ cresce da 0 sino a 2π, quando θ cresce da 0 a 2π, e questo dimostra che l'equazione

$$f(z) - f(\gamma) = 0$$

ha solamente un zero $z = \gamma$ nel circolo $|z| < \mu$. Il teorema è così dimostrato.

Il limite μ è raggiunto per i polinomi

$$z(z^q - z_0{}^q)^n.$$

Nel caso particolare $q = 1$ si ottiene un teorema di ALEXANDER [1].

Con lo stesso metodo si può dimostrare il teorema seguente:

II. *Sia* z_0 *lo zero del polinomio*

$$(6) \qquad \frac{f(z)}{z^p} = 1 + a_1 z^q + a_2 z^{2q} + \ldots + a_n z^{nq}$$

più vicino all'origine. Il polinomio f(z) *è* p*–valente nel circolo*

$$(7) \qquad |z| \leqq |z_0| \sqrt[q]{\frac{p}{qn+p}}.$$

Il limite (7) è raggiunto per i polinomi

$$z^p(z^q - z_0{}^q)^n.$$

Con lo stesso metodo si possono dimostrare dei teoremi ancora più generali.

(1) P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Paris, 1933.